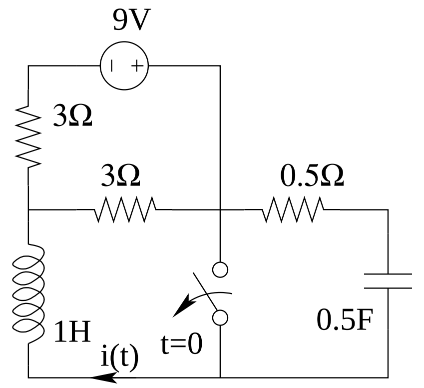
0.1 Esercizio E10, pag. 290 Perfetti (Transitori in reti del secondo ordine).

0.1.1 Testo



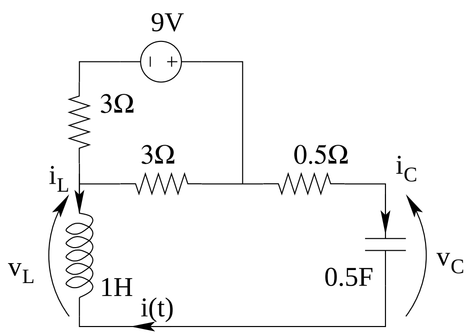
Nel circuito in figura l'interruttore rimane chiuso per molto tempo, quindi si apre in $t = 0$. Ricavare la corrente $i(t)$ per $t > 0$

0.1.2 Soluzione

Iniziamo con lo scrivere le equazioni di stato e con il trovare la soluzione generale. Successivamente calcoleremo le condizioni iniziali ed i valori asintotici per ottenere la soluzione completa.

Equazioni di stato

Segnamo innanzitutto sulla figura le variabili di stato v_C ed i_L e le loro controparti i_C e v_L. Per comodità le scegliamo in modo che seguano la convenzione utilizzata per scrivere le relazioni costitutive di induttore e condensatore, ovvero usiamo la convenzione degli utilizzatori. Sostituiamo inoltre all'interruttore un circuito aperto, dato che stiamo studiando la rete per t>0.



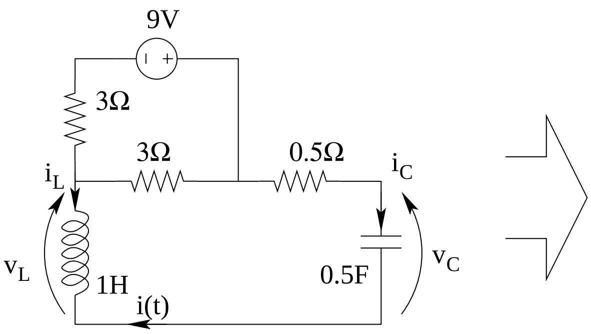
Per scrivere le equazioni di stato utilizzeremo le relazioni costitutive degli elementi dinamici, esplicitando le derivate

$$\begin{cases} i_c = C\frac{dv_c}{dt} \\ v_L = L\frac{dv_l}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv_c}{dt} = \frac{i_C}{C} \\ \frac{dv_l}{dt} = \frac{i_L}{L} \end{cases} \tag{1}$$

Calcoliamo quindi i_C e v_L in funzione delle variabili di stato per poter completare la scrittura delle equazioni di stato.

Facoltativamente, per questo passaggio, si possono sostituire all'induttore ed al condensatore rispettivamente un generatore di tensione v_C ed un generatore di corrente i_L.

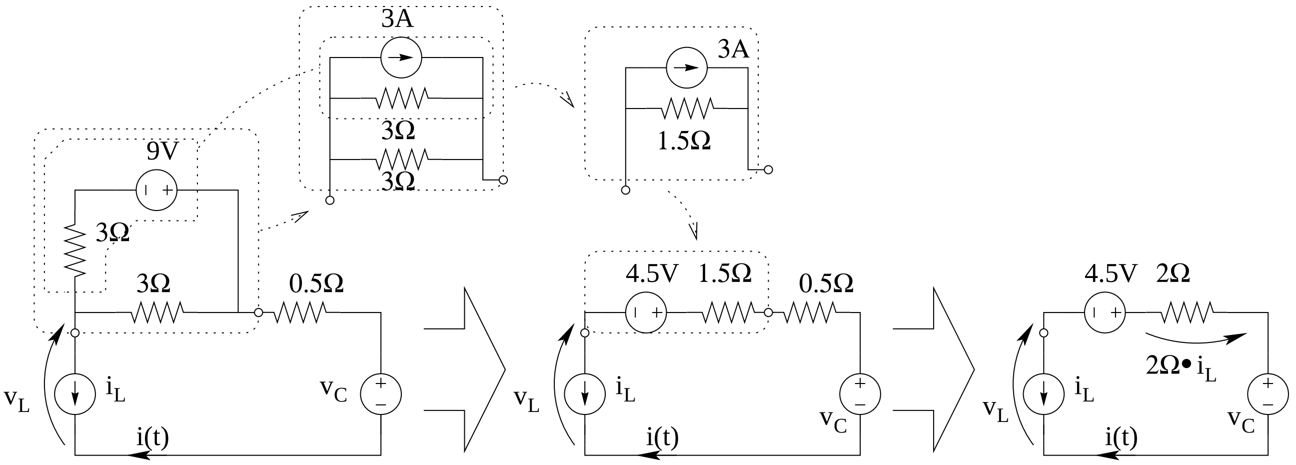
Tale passaggio è dal punto di vista della teoria puramente 'grafico' in quanto si possono effettuare esattamente gli stessi passaggi direttamente sulla rete di partenza, senza perdere tempo a ridisegnare il circuito. Dal punto di vista pratico invece la rete con i generatori sembra più semplice, dato che abbiamo studiato per più tempo le rete in regime stazionario rispetto a quelle tempovarianti e quindi il secondo disegno è più 'familiare' e viene in media risolto in meno tempo.



Otteniamo immediatamente

$$i_C = -i_L \tag{2}$$

da una LKI al nodo in basso.
Usando la trasformazione dei generatori otteniamo:



Da cui, con una LKV alla maglia

$$v_L + 4.5V + 2i_L - v_C = 0 \Rightarrow v_L = v_C - 2i_L - 4.5V \tag{3}$$

Quindi, unendo le 1,2 e 3 otteniamo

$$\begin{cases} \frac{dv_c}{dt} = \frac{-i_L}{C} \\ \frac{di_l}{dt} = \frac{v_C - 2i_L - 4.5V}{L} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv_c}{dt} = 0v_C - 2i_L + 0 \\ \frac{di_l}{dt} = v_C - 2i_L - 4.5 \end{cases} \tag{4}$$

In forma matriciale:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -4.5 \end{bmatrix} \tag{5}$$

quindi la matrice di stato è:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

con traccia

$$T = -2$$

e determinante

$$\Delta = 2$$

Abbiamo $T < 0$e $\Delta > 0$, quindi la rete è stabile

$$\alpha = -\frac{1}{2}T = 1$$

$$\omega_0^2 = \Delta = 2$$

$$S^2 - 2\alpha S + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow S = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm j$$

Avendo radici complesse coniugate la soluzione sarà del tipo

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[A_1 cos(\beta t) + A_2 sin(\beta t)\right]$$

con

$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha} = 1$$

Otteniamo quindi

$$i(t) = e^{-t}\left[A_1 \cos(t) + A_2 \sin(t)\right] + I_\infty \tag{6}$$

Analizzando la rete iniziale otteniamo, per i valori asintotici:
$I_\infty = -I_{L\infty} = 0$ in quanto la rete è stabile, tutti i generatori sono costanti e quindi la corrente nel condensatore tende a zero.
Per il valore iniziale:

$$i(0) = -i_L(0) = \frac{9V}{3\Omega} = 3A$$

quindi, valutando $i(0)$ dalla 6 ed uguagliandola al valore appena calcolato otteniamo

$$1 \cdot (A_1 cos(0) + A_2 sin(0)) = 3 \Rightarrow A_1 + 0 = 3 \Rightarrow A_1 = 3$$

Per calcolare l'altro coefficiente valutiamo, in t=0 la derivata di i_L:
Dalla seconda delle equazioni di stato 4 otteniamo:

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_0 = v_C(0) - 2i_L(0) - 4.5 = 0 - (-6) - 4.5 = 1.5$$

quindi

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_0 = -\left.\frac{di_L}{dt}\right|_0 = -1.5$$

Derivando la 6 e valutandola in zero otteniamo

$$\frac{di}{dt} = -e^{-t}\left(A_1 cos(t) + A_2 sin(t)\right) + e^{-t}\left(-A_1 sin(t) + A_2 cos(t)\right)$$

che, valutata per t=0

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_0 = -A_1 + A_2$$

Sostituendo il valore trovato precedentemente

$$-1.5 = -A_1 + A_2 \Rightarrow -1.5 = -3 + A_2 \Rightarrow A_2 = 1.5$$

otteniamo quindi:

$$i(t) = e^{-t}\left[3\cos(t) + \frac{3}{2}\sin(t)\right]$$

la quale è la soluzione cercata.

Se si volesse scrivere la stessa fattorizzando i termini esponenziale e sinusoidale potremmo raccogliere il termine $\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}$ ottenendo:

$i(t) = \sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}e^{-t}\left[\frac{3}{\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}}\cos(t) + \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}}\sin(t)\right]$

Imponendo poi

$\frac{3}{\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \cos\gamma$

$\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \sin\gamma$

possiamo riscrivere la precedente come

$i(t) = \sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}e^{-t}\left[\cos(\gamma)\cos(t) + \sin(\gamma)\sin(t)\right]$

con

$\gamma = atn\frac{\frac{3}{2}}{3} = atn\frac{1}{2} = 0,463647609$

considerato che dalla trigonometria abbiamo:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

otteniamo

$$i(t) = 3\sqrt{\frac{5}{4}}\cdot e^{-t}\cdot\cos(t-0.463...) \simeq 3,354e^{-t}\cos(t-0.46)$$