ELETTROTECNICA

FONDAMENTI DI CONVERSIONE ELETTROMECCANICA

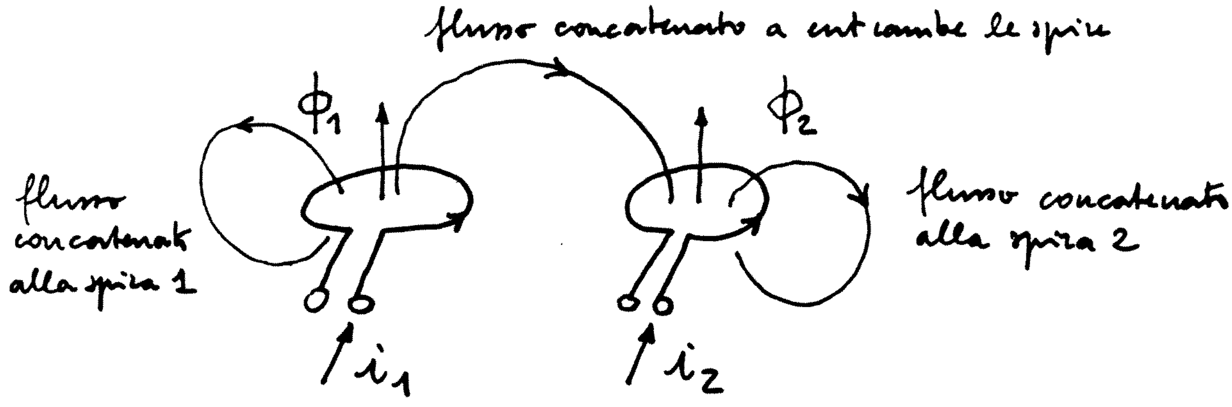
2. INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI
3. CIRCUITI MAGNETICI

Appunti dalle lezioni di Elettrotecnica del
prof. ***Giovanni Ghione*** *al Politecnico di Milano*

β. Induttori mutuamente accoppiati

INDUTTORI A PIU' MORSETTI (PORTE)

Consideriamo due spire percorse da correnti i_1 e i_2:



Se il mezzo circostante è lineare il flusso concatenato con la spira 1 potrà scriversi:

$$\phi_1 = L_{11}\, i_1 + L_m\, i_2 \quad \text{(sovr. effetti)}$$

e analogamente (vale la reciprocità):

$$\phi_2 = L_m\, i_1 + L_{22}\, i_2$$

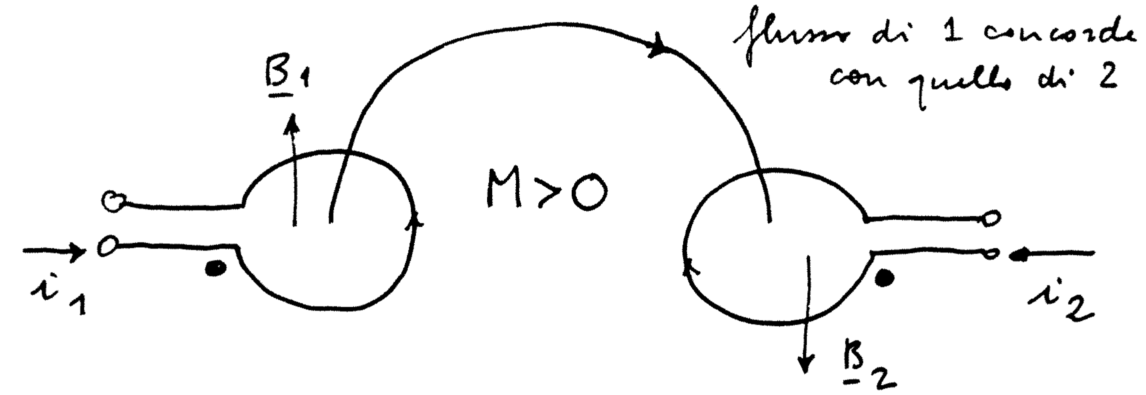
$L_m = M$ è detto INDUTTANZA MUTUA fra le due spire.

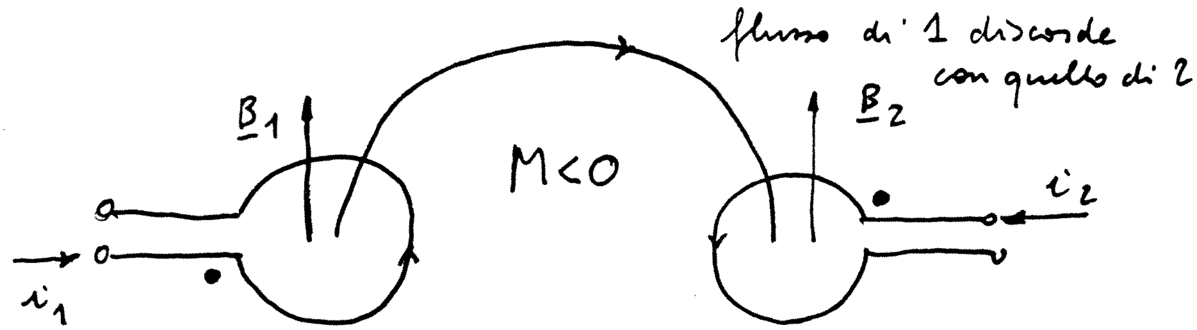
La mutua induttanza M può essere positiva o negativa:

$M>0$ se il flusso generato dalla spira 1 quando la spira 2 è disattivata ($i_2=0$) è concorde con quello generato dalla spira 2 quando la spira 1 è disattivata

$M<0$ se il flusso è discorde.

Si indica spesso con il simbolo • il morsetto da cui entrano le correnti.





Un induttore a N morsetti è in generale una struttura a N porte (la corrente entra ed esce in ciascuna porta). Ad ogni porta è associato un flusso ϕ. In generale è possibile definire:

$$\underline{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{i} = \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_N \end{pmatrix}$$

e un induttore a N porte sarà caratterizzato (se lineare) dalla MATRICE INDUTTANZA:

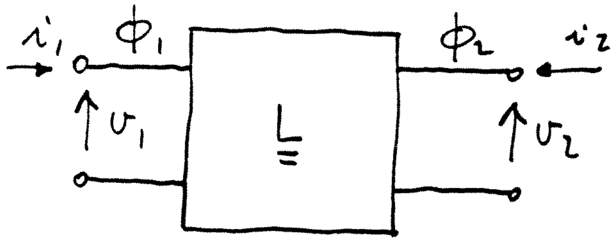
$$\underline{\phi} = \underline{\underline{L}}\,\underline{i}$$

Anche qui vale di solito la proprietà di reciprocità:

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{L}}^T$$

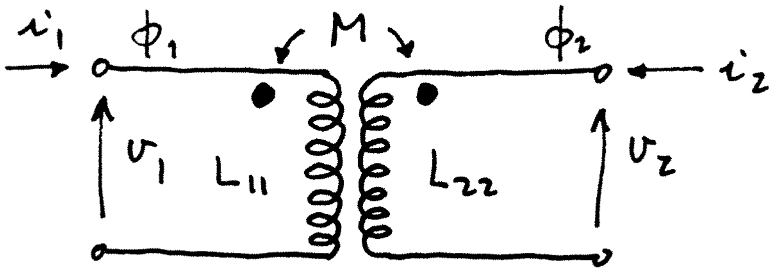
INDUTTORE A DUE PORTE

Per un induttore a due porte si ha:



$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_m \\ L_m & L_{22} \end{pmatrix}$$

Si usa spesso il simbolo seguente:

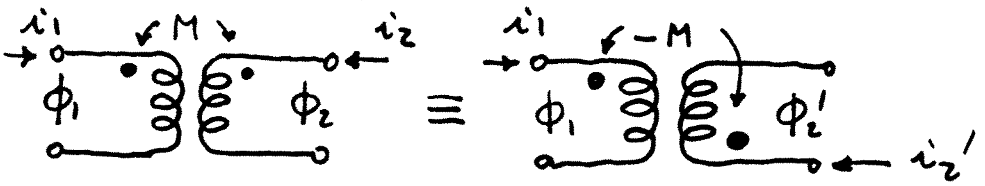


che corrisponde alle equazioni:

$$\phi_1 = L_{11}\, i_1 + M\, i_2$$

$$\phi_2 = M\, i_1 + L_{22}\, i_2$$

Si noti che scambiare la posizione del simbolo • equivale a cambiare il segno della mutua induttanza M:



Infatti: $i_2' = -i_2, \quad \phi_2' = -\phi_2$, da cui:

$$\phi_1 = L_{11} i_1 + M i_2 = L_{11} i_1 + M(-i_2')$$

$$\phi_2 = M i_1 + L_{22} i_2 = M i_1 + L_{22}(-i_2')$$

ossia:

$$\phi_2' = -\phi_2 = -M i_1 + L_{22} i_2'$$

per cui:

$$\begin{cases} \phi_1 = L_{11} i_1 - M i_2' = L_{11} i_1 + M' i_2' \\ \phi_2' = -M i_1 + L_{22} i_2' = M' i_1 + L_{22} i_2' \end{cases}$$

rappresentazione equivalente ma con $M' = -M$.

RELAZIONE TENSIONE-CORRENTE DI INDUTTORE A N PORTE

Si ha:

$$\underline{v} = \frac{d\underline{\phi}}{dt}$$

da cui:

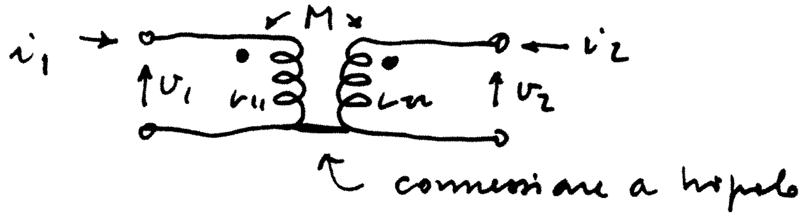
$$\underline{v} = \underline{\underline{L}} \frac{d\underline{i}}{dt}$$

Per un induttore a due porte:

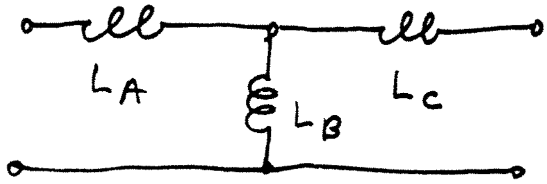
$$\begin{cases} v_1 = L_{11} \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \dfrac{di_1}{dt} + L_{22} \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

CIRCUITI EQUIVALENTI DI INDUTTORI A 2 PORTE

A) CIRCUITO EQUIVALENTE A T : è valido per un induttore a due porte connesso a TRIPOLO :

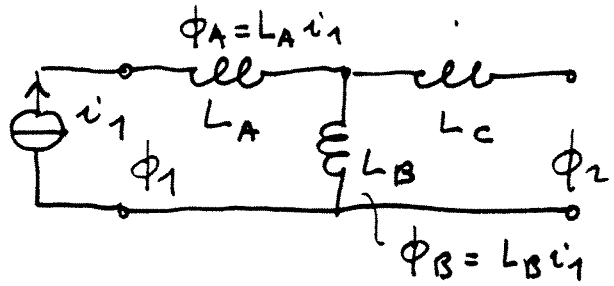


Il circuito equivalente ha la struttura:



Calcoliamo la matrice induttanza:

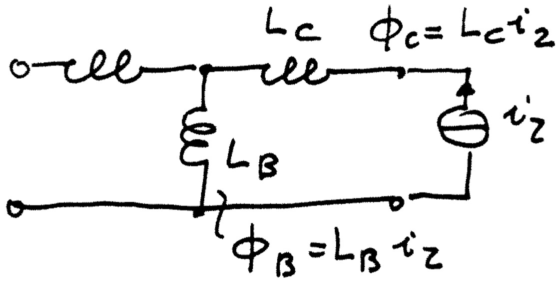
$$L_{11} = \frac{\Phi_1}{i_1}\Big|_{i_2=0} =$$



$$= L_A + L_B$$

$$L_m = M = \frac{\Phi_2}{i_1}\Big|_{i_2} = L_B$$

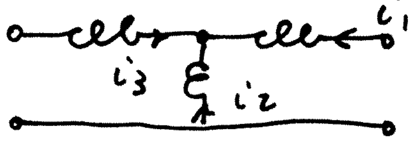
$$L_{22} = \frac{\Phi_2}{i_2}\Big|_{i_1=0} = L_B + L_C$$



Pertanto:

$$\begin{cases} L_A = L_{11} - M \\ L_B = M \\ L_C = L_{22} - M \end{cases}$$

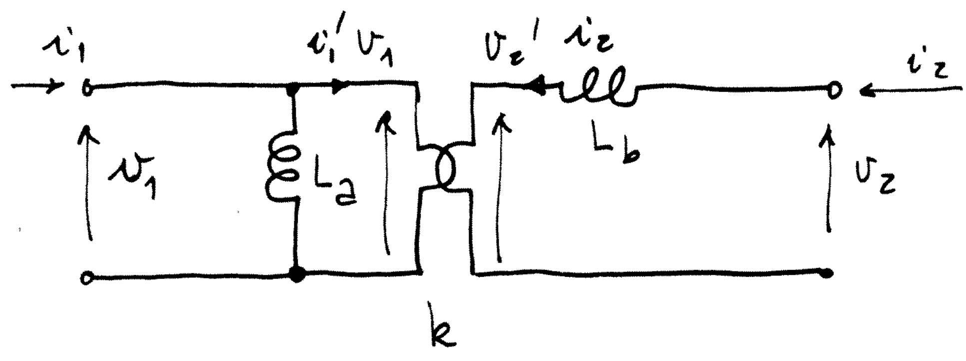
Il circuito a T ha due svantaggi: 1) è un circuito a tripolo, che può essere trasformato in due-porte mediante un trasformatore di rapporto di trasformazione unitario in cascata; 2) le variabili di stato dei tre induttori presenti sono linearmente dipendenti perché legati dalla equazione al nodo 1:



$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

Questi inconvenienti sono superati dal

B) CIRCUITO CON TRASFORMATORE IDEALE. Si consideri il circuito seguente:



$$v_2' = k v_1 \quad ; \quad i_2 = -\frac{1}{k} i_1'$$

La matrice induttanza è data dalle considerazioni seguenti:

$$v_1 = L_a \frac{d}{dt}(i_1 - i_1') =$$

$$= L_a \frac{di_1}{dt} - L_a(-k)\frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = k v_1 + L_b \frac{di_2}{dt} =$$

$$= k L_a \frac{di_1}{dt} + k^2 L_a \frac{di_2}{dt} + L_b \frac{di_2}{dt}$$

ossia:

$$v_1 = L_a \frac{di_1}{dt} + k L_a \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = k L_a \frac{di_1}{dt} + (k^2 L_a + L_b)\frac{di_2}{dt}$$

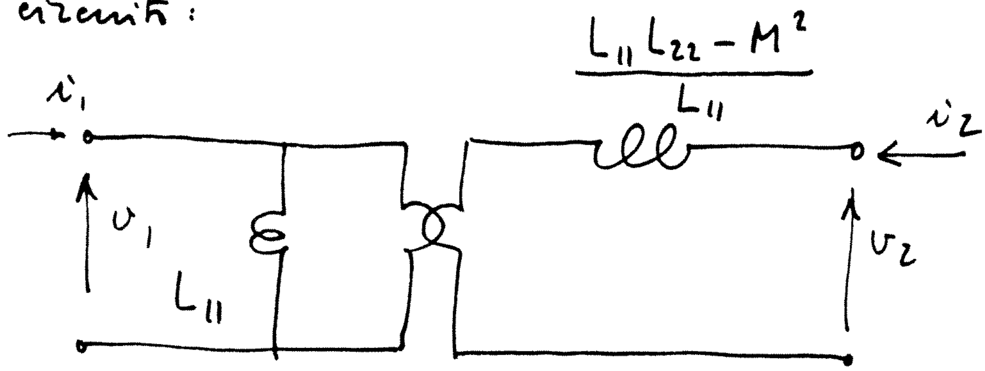
da cui:

$$L_{11} = L_a \quad ; \quad L_m = M = k L_a \quad ; \quad L_{22} = L_b + L_a k^2$$

ossia:

$$L_a = L_{11} \quad ; \quad L_b = \frac{L_{11}L_{22} - M^2}{L_{11}} \quad ; \quad k = M / L_{11}$$

Pertanto un induttore a due porte è completamente equivalente al circuito:



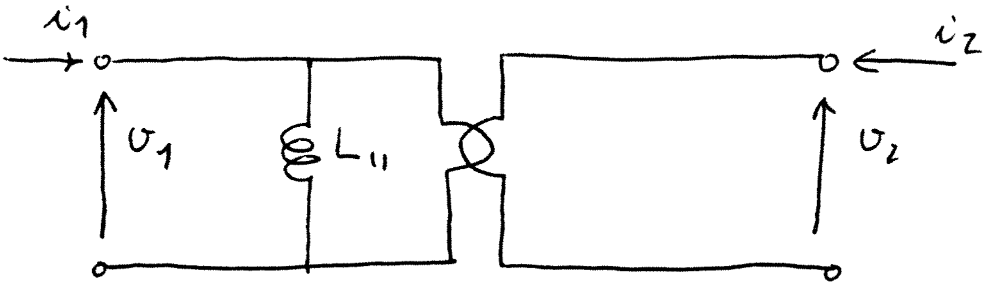
$$k = M/L_{11}$$

Si noti che il circuito equivalente con trasformatore contiene un solo elemento reattivo, invece di due, se vale la relazione:

$$L_{11}L_{22} - M^2 = 0$$

$$M = \pm\sqrt{L_{11}L_{22}}$$

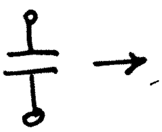
detta condizione di ACCOPPIAMENTO PERFETTO. In tale caso il circuito si riduce a:

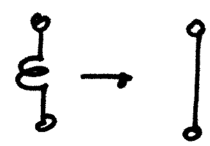


$$k = \sqrt{L_{22}/L_{11}}$$

Si noti che per $L_{11} \to \infty$ il circuito si riduce ad un trasformatore ideale.

CONDENSATORI E INDUTTORI IN CONTINUA

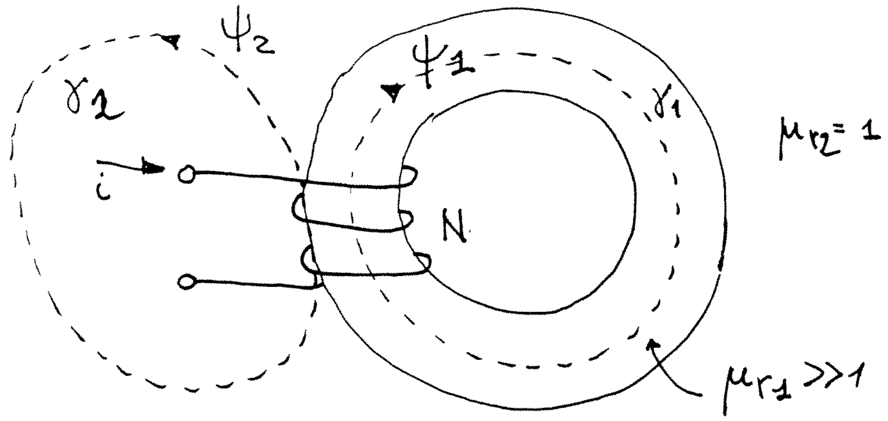
 se $v = \text{cost}$ $(i = 0)$

 se $i = \text{cost}$ $(v = 0)$

CIRCUITI MAGNETICI

In molte situazioni di importanza pratica (trasformatori, relais, motori elettrici) il calcolo della matrice induttanza di un sistema di avvolgimenti avvolti su un nucleo di materiale ad alta permeabilità magnetica (ferromagnetico, ferrimagnetico) si può fare, in modo approssimato, tenendo presente le seguenti ipotesi semplificative:

A) Il flusso ϕ (ψ) e la densità di flusso $\underline{B}$ sono trascurabili all'esterno del nucleo ad alta permeabilità:

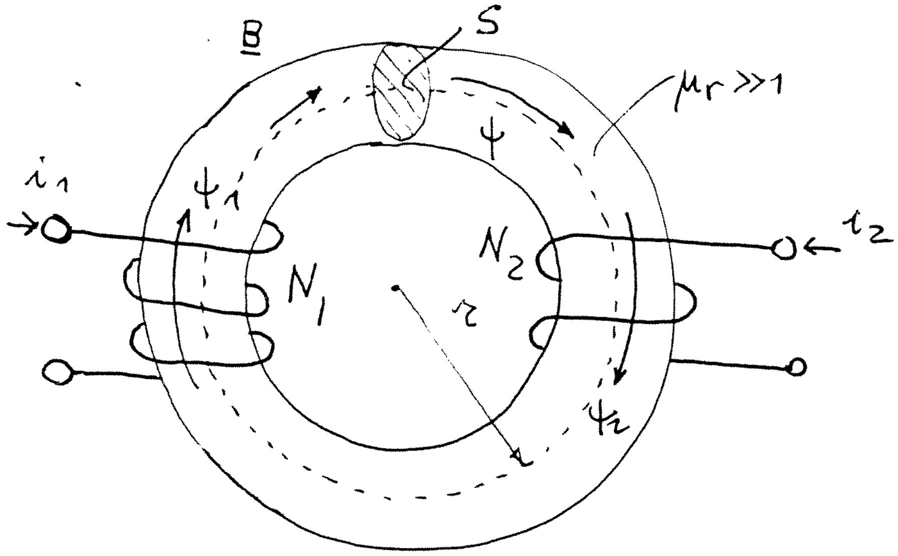


Infatti applicando la legge di Ampère alle due curve chiuse γ_1 e γ_2 di lunghezza paragonabile si ottiene in entrambi i casi $H_1 L = H_2 L = Ni$ ove H_1 e H_2 sono i valori medi dei campi magnetici dentro e fuori il nucleo; pertanto $H_1 \approx H_2$ ma $B_1 \gg B_2$ perché $\mu_1 \gg \mu_2$

B) La densità di flusso $\underline{B}$ e il campo magnetico $\underline{H}$ sono approssimativamente costanti in tratti uniformi (stesso materiale, stessa area della sezione del nucleo) del nucleo.

C) Il materiale del nucleo è lineare. Questa ipotesi può essere abbandonata con qualche complicazione, come si vedrà in seguito.

ESEMPIO Consideriamo un nucleo toroidale sul quale sono avvolti due avvolgimenti di N_1 e N_2 spire



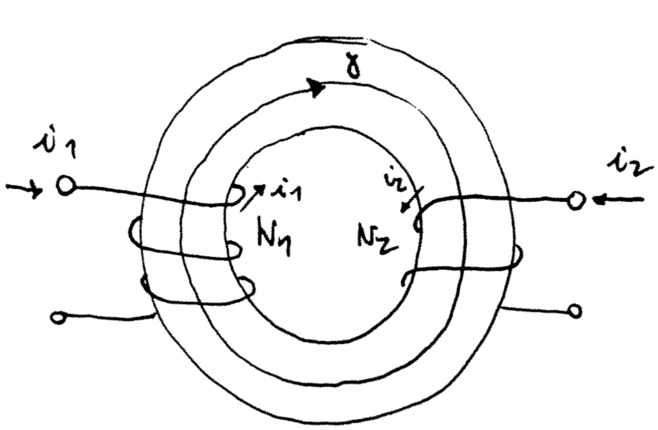
$L = 2\pi r$
lunghezza media del nucleo

S area del nucleo

Indichiamo con ψ_1 e ψ_2 le direzioni dei flussi originati dagli avvolgimenti 1 e 2 quando l'altro avvolgimento è disattivato. Indichiamo invece con ψ il flusso presente nel nucleo. Poichè $\underline{B}$ è costante nel nucleo e diretto secondo la direzione circonferenziale, e la sezione S del nucleo è costante, si ottiene che anche ψ è costante in tutte le sezioni del nucleo e pari a:

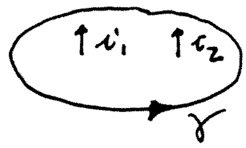
$$\psi = B \cdot S = \mu_r \mu_0 H \cdot S$$

Si ha poi, dal teorema di Ampère, e tenendo presente che $\underline{H}$ è costante nel nucleo:



$$\oint_\gamma \underline{H} \cdot d\underline{l} = N_1 i_1 + N_2 i_2 = H \cdot L$$

(si noti che il verso delle correnti è concorde con la convenzione:



)

Si ha allora:

$$\psi = \frac{\mu_r \mu_0 S}{L} (N_1 i_1 + N_2 i_2)$$

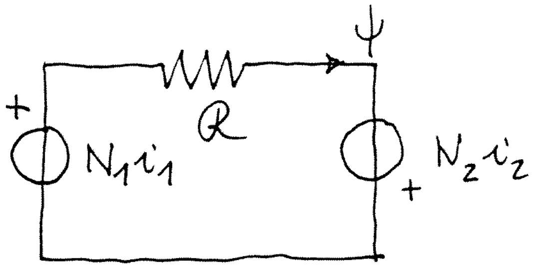
formalmente, introducendo la riluttanza del nucleo:

$$\mathcal{R} = L / \mu_r \mu_0 S$$

la relazione:

$$\psi = \frac{N_1 i_1}{\mathcal{R}} + \frac{N_2 i_2}{\mathcal{R}}$$

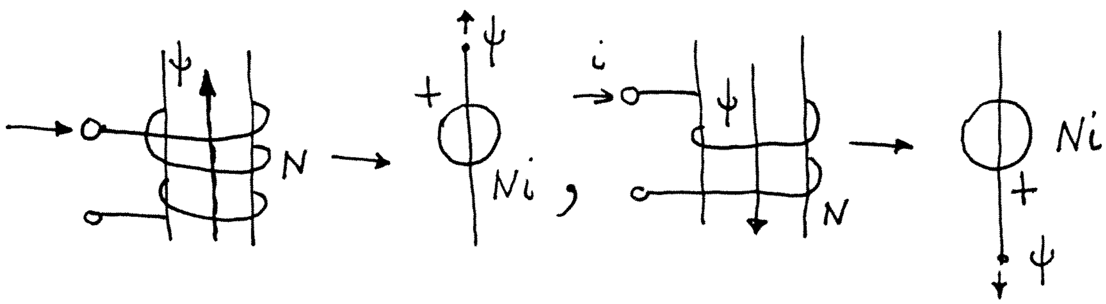
è la soluzione del circuito equivalente elettrico:



In questo si notano le analogie:

R resistenza	$\longleftrightarrow$	$\mathcal{R}$ riluttanza	
i corrente	$\longleftrightarrow$	ψ flusso	
e forza elettromotrice	$\longleftrightarrow$	Ni forza MAGNETOMOTRICE	
v tensione elettrica	$\longleftrightarrow$	$v_H = \mathcal{R}\psi$ "tensione magnetica"	
Circuito elettrico		"Circuito magnetico"	

Si noti che vale la convenzione:



Una volta determinato il flusso ψ nel nucleo i flussi concatenati con i due avvolgimenti sono:

$$\Phi_1 = N_1\psi = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} i_1 + \frac{N_1N_2}{\mathcal{R}} i_2$$

$$\Phi_2 = N_2\psi = \frac{N_1N_2}{\mathcal{R}} i_1 + \frac{N_2^2}{\mathcal{R}} i_2$$

da cui, per definizione, la matrice induttanza:

$$L_{11} = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}}$$

$$L_{12} = L_{21} = M = \frac{N_1N_2}{\mathcal{R}}$$

$$L_{22} = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}}$$

Si noti che in questo caso si ha accoppiamento perfetto:

$$L_{11}L_{22} - M^2 = \frac{N_1^2N_2^2}{\mathcal{R}^2} - \frac{(N_1N_2)^2}{\mathcal{R}^2} = 0$$

perché tutto il flusso concatenato con la spira 1 è anche concatenato con l'avvolgimento 2 (non c'è flusso disperso).

TEORIA GENERALE DEI CIRCUITI MAGNETICI

Si dice circuito magnetico una connessione o rete composta da lati formati da:

1) elementi magneticamente passivi, formati da tratti di lunghezza L_i e sezione S_i (permeabilità relativa μ_{ri}); questi hanno un circuito equivalente elettrico formato da una riluttanza

$$\mathcal{R}_i = L_i / \mu_{ri}\mu_0 S_i$$

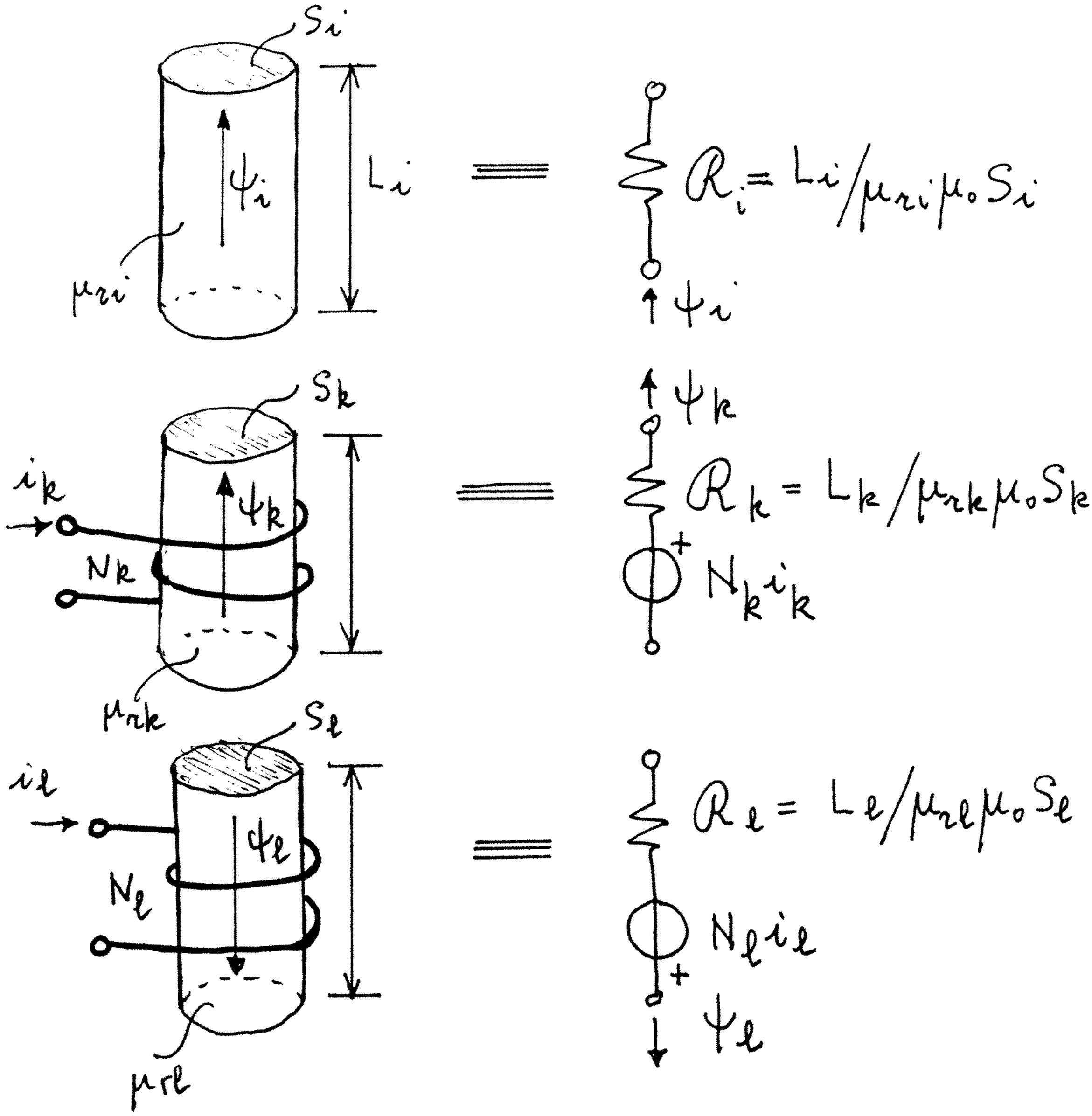
2) elementi magneticamente attivi, formati da tratti di lunghezza L_k, sezione S_k, permeabilità relativa μ_{rk} su cui è presente un avvolgimento di N_k spire percorso dalla corrente i_k: il circuito equivalente elettrico è composto da una riluttanza

$$\mathcal{R}_k = L_k/\mu_{rk}\mu_0 S_k$$

in serie ad una forza magnetomotrice:

$$e_k = \pm N_k i_k$$

Si hanno quindi i modelli circuitali:

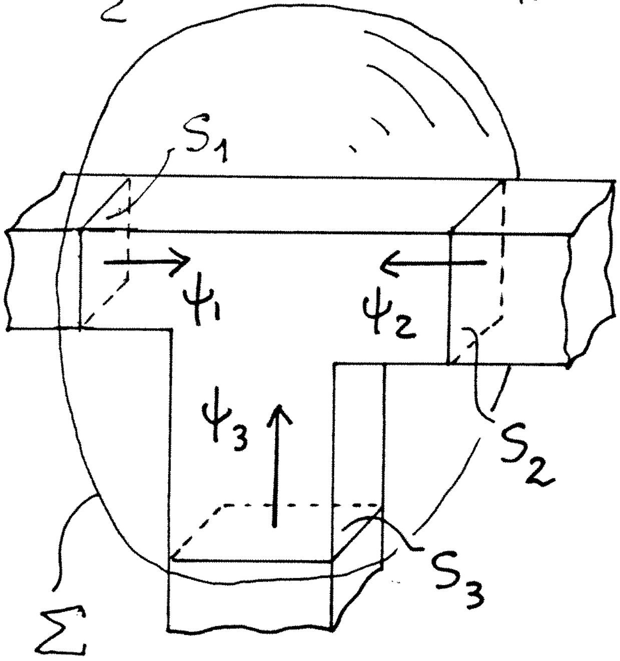


I punti di connessione dei lati del circuito magnetico sono i <u>nodi</u> del circuito magnetico; poiché (Legge di Gauss magnetica):

$$\oint_\Sigma \underline{B}\cdot\hat{n} \;\; \sigma = 0$$

si ha, per densità di flusso costanti e nulle fuori dalle sezioni del circuito magnetico:

$$\oint_\Sigma \underline{B}\cdot\hat{n}\, d\sigma \approx \sum_k B_k S_k = \sum_k \psi_k = 0$$



Si ha cioè:

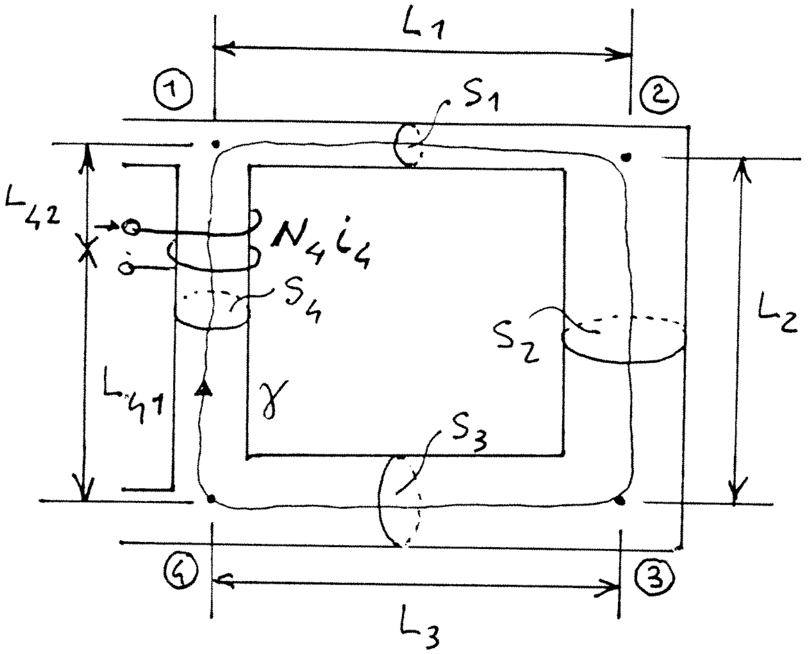
> <u>KCL Magnetica</u>:
>
> la somma dei flussi entranti in un nodo è nulla:
>
> $$\sum_k \psi_k = 0$$

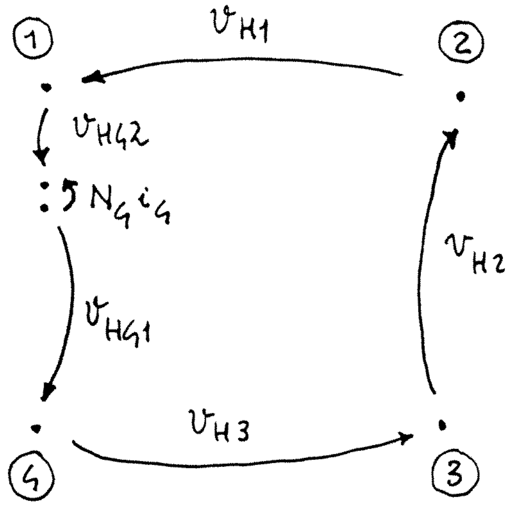
Dato poi un percorso chiuso γ in un circuito magnetico, dalla legge di Ampère si ha:

$$\oint_\gamma \underline{H}\cdot d\underline{l} \cong \sum_k H_k L_k = \sum_k v_{Hk} = \sum_i N_i i_i$$

dove si è definita la tensione magnetica sul tratto A-B:

$$v_{HAB} = \int_A^B \underline{H}\cdot d\underline{l}$$





ad esempio:

$$\oint_{\gamma} \underline{H} \cdot d\underline{l} = N_4 i_4$$

dà:

$$v_{H1} + v_{H2} + v_{H3} + v_{H41} + v_{H42} = N_4 i_4$$

ossia:

$$H_1 L_1 + H_2 L_2 + H_3 L_3 + H_4 L_{41} + H_4 L_{42} = N_4 i_4$$

In definitiva, generalizzando, si ha:

KVL Magnetica:

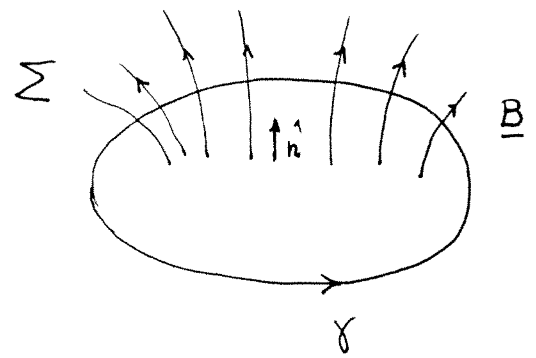
la somma delle cadute di tensione magnetica su di un percorso chiuso è pari alla somma delle forze magnetomotrici presenti nel percorso (pesate con segno opportuno)

In conclusione un circuito magnetico soddisfa a tutte le leggi (topologiche, KCL + KVL; relazioni costitutive) di un circuito elettrico, ed è quindi completamente sostituito dal relativo circuito equivalente elettrico.

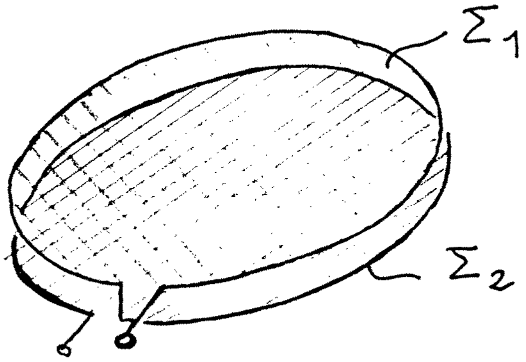
OSSERVAZIONE: FLUSSO E FLUSSO CONCATENATO

Si consideri una regione dello spazio in cui è presente una densità di flusso $\underline{B}$. Una superficie Σ di contorno γ ha allora un flusso concatenato:

$$\psi = \int_\Sigma \underline{B} \circ \hat{n}\, d\sigma$$



Supponiamo ora che su γ sia disposto un avvolgimento di N spire (ad es. N=2): se l'avvolgimento giace praticamente nello stesso piano della superficie Σ, allora il flusso concatenato dall'avvolgimento è quello relativo a $\Sigma_1 + \Sigma_2 \approx 2\Sigma$, ossia il flusso concatenato ϕ è:

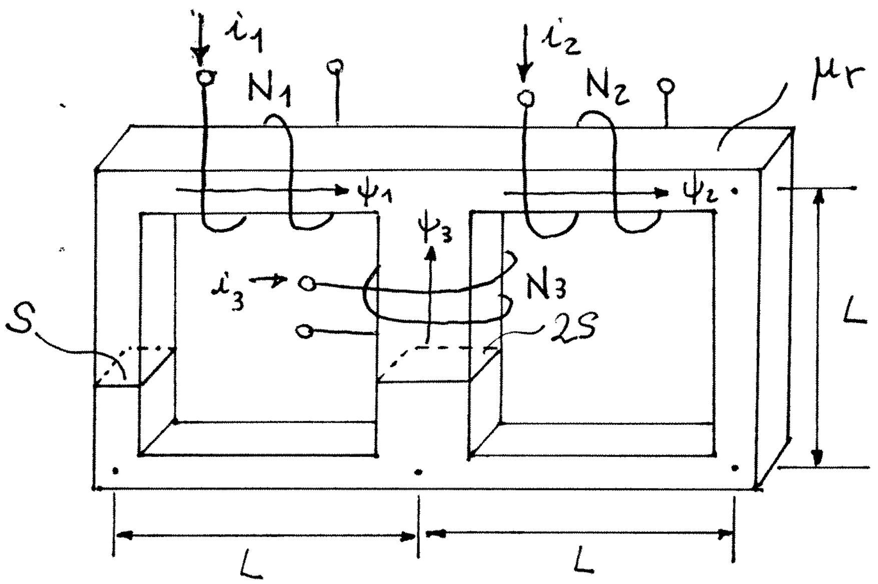


$$\phi = 2\psi = 2 \int_\Sigma \underline{B} \cdot \hat{n}\, d\sigma$$

In definitiva quindi il flusso concatenato con un avvolgimento di N spire è dato da N volte il flusso concatenato con un solo avvolgimento:

$$\phi = N\psi = N \int_\Sigma \underline{B} \circ \hat{n}\, d\sigma$$

ESEMPIO Calcolare la matrice induttanza della struttura in figura:

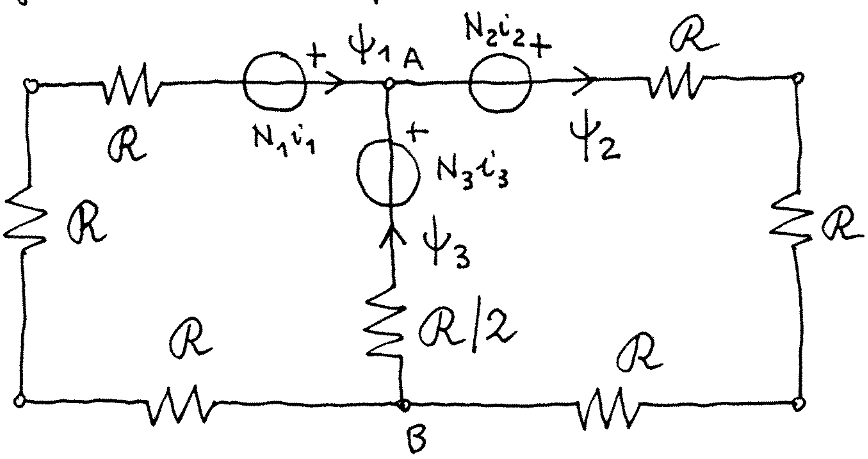


Si ha allora, detta:

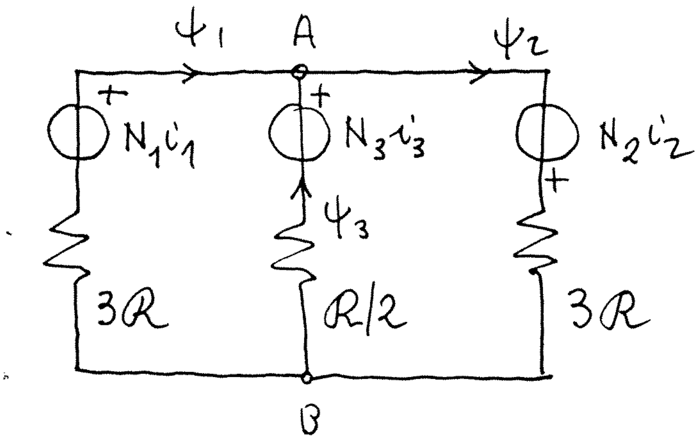
$$\mathcal{R} = \frac{L}{\mu_r \mu_0 S}$$

$$\mathcal{R}_1 = \frac{L}{\mu_r \mu_0 2S} = \frac{\mathcal{R}}{2}$$

il seguente circuito equivalente:



La rete si può risolvere ad es. applicando il teorema di Millman ai tre lati connessi ai nodi A, B; si ottiene il circuito equivalente:



$$v_{AB} = \frac{\frac{N_1 i_1}{3R} + \frac{-N_2 i_2}{3R} + \frac{2N_3 i_3}{R}}{\frac{1}{3R} + \frac{1}{3R} + \frac{2}{R}}$$

$$= \frac{1}{8}\left(N_1 i_1 - N_2 i_2 + 6 N_3 i_3\right)$$

Si ha poi:

$$v_{AB} = N_1 i_1 - 3R\psi_1$$
$$= N_3 i_3 - \frac{R}{2}\psi_3$$
$$= -N_2 i_2 + 3R\psi_2$$

da cui:

$$\psi_1 = \frac{1}{3R}\left(N_1 i_1 - v_{AB}\right) = \frac{1}{3R}\left[N_1 i_1\left(1-\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8}N_2 i_2 - \frac{6}{8}N_3 i_3\right] =$$

$$= \frac{1}{24R}\left[7 N_1 i_1 + N_2 i_2 - 6 N_3 i_3\right]$$

$$\psi_2 = \frac{1}{3R}\left(v_{AB} + N_2 i_2\right) = \frac{1}{3R}\left[\frac{1}{8}N_1 i_1 - \left(-1+\frac{1}{8}\right)N_2 i_2 + \frac{6}{8}N_3 i_3\right] =$$

$$= \frac{1}{24R}\left[N_1 i_1 + 7 N_2 i_2 + 6 N_3 i_3\right]$$

$$\psi_3 = \frac{2}{R}\left(N_3 i_3 - v_{AB}\right) = \frac{2}{R}\left[N_3 i_3 - \frac{1}{8}N_1 i_1 + \frac{1}{8}N_2 i_2 - \frac{6}{8}N_3 i_3\right] =$$

$$= \frac{1}{4R}\left[-N_1 i_1 + N_2 i_2 + 2 N_3 i_3\right]$$

ossia, passando ai flussi concatenati:

$$\Phi_1 = N_1\psi_1 \qquad \Phi_2 = N_2\psi_2 \qquad \Phi_3 = N_3\psi_3$$

$$\Phi_1 = \frac{7}{24R} N_1^2 i_1 + \frac{1}{24R} N_1 N_2 i_2 - \frac{6}{24R} N_1 N_3 i_3$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{24R} N_2 N_1 i_1 + \frac{7}{24R} N_2^2 i_2 + \frac{6}{24R} N_2 N_3 i_3$$

$$\Phi_3 = \frac{-1}{4R} N_1 N_3 i_1 + \frac{1}{4R} N_2 N_3 i_2 + \frac{2}{4R} N_3^2 i_3$$

ossia:

$$\underline{\underline{L}} = \frac{1}{24R} \begin{pmatrix} 7N_1^2 & N_1N_2 & -6N_1N_3 \\ N_1N_2 & 7N_2^2 & 6N_2N_3 \\ -6N_1N_3 & 6N_2N_3 & 12N_3^2 \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che:

$$\det \underline{\underline{L}} = 0$$

ossia ci si trova in una situazione di accoppiamento perfetto (tutto il flusso concatenato con ciascuno degli avvolgimenti è anche concatenato con gli altri due).

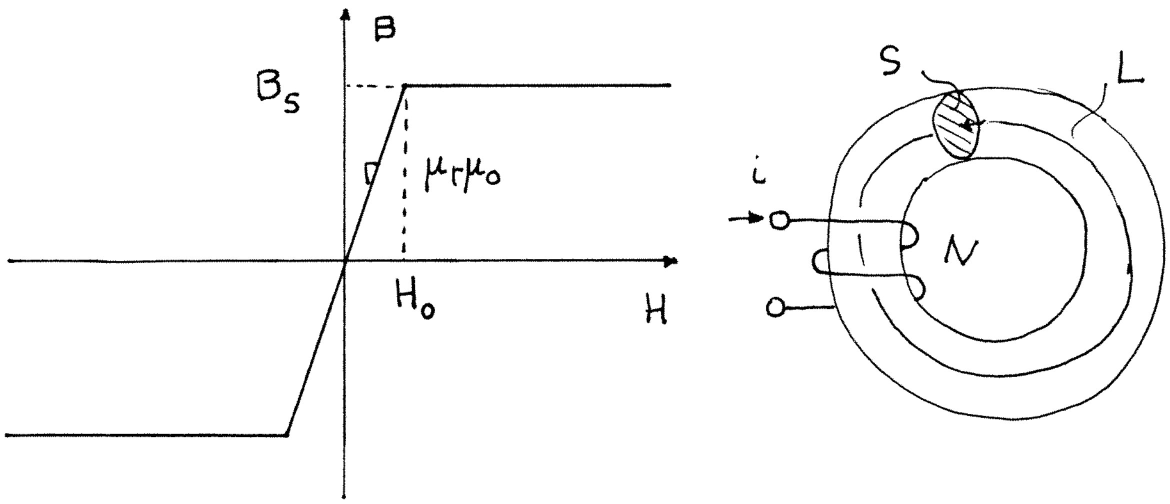
CIRCUITI MAGNETICI NON LINEARI

Se il materiale magnetico di cui è composto un circuito magnetico presenta una caratteristica $B(H)$ non lineare, allora, supponendo che l'isteresi sia trascurabile (materiali magnetici dolci) il circuito magnetico avrà riluttanze non lineari, ossia sarà equivalente ad un circuito elettrico con resistori non lineari. Infatti si ha:

$$B = B(H) \longrightarrow \psi = B \cdot S = \psi(H \cdot L) = \\ = \psi(v_H)$$

cioè per un tratto di sezione S e lunghezza L la relazione $B(H)$ induce una relazione $\psi(v_H)$ fra flusso e tensione magnetica.

<u>ESEMPIO</u> Valutare l'induttanza di un avvolgimento di N spire avvolto su un nucleo di sezione S, lunghezza L e caratteristica $B(H)$ in figura.



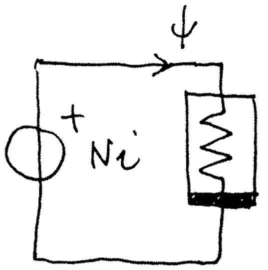
$B_S = 0.5 \ Wb/m^2$; $N = 1000$; $S = 1 cm^2$; $L = 20 cm$;
$\mu_r = 10.000$.

Si ha $B_S \approx \mu_r\mu_0 H_0$ da cui $H_0 = 0.5/10000/4\pi\times10^{-7} =$
$= 39.8 \ A/m$. Pertanto la riluttanza del nucleo ha caratteristica

$$\psi = \begin{cases} \dfrac{\mu_r\mu_0 S}{L} Ni = 6.3\times10^{-6} Ni & \text{per } Ni < H_0 L = 7.96 \ A \\ B_S \cdot S = 50\times10^{-6} \ Wb & \text{per } Ni \geq 7.96 \ A \end{cases}$$

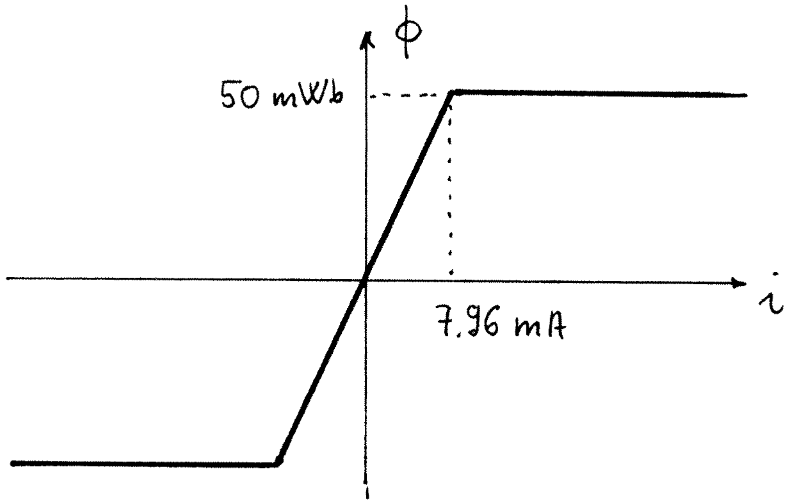
cioè la caratteristica flusso - corrente i:

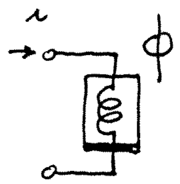
$$\phi = N\psi = \begin{cases} 6.3 \quad i & Wb \quad \text{per } i \le 7.96 \text{ mA} \\ 50\times 10^{-3} & Wb \quad \text{per } i > 7.96 \text{ mA} \end{cases}$$



$$\psi = \begin{cases} 6.3\times 10^{-6}\, v_H \,, & v_H \le 7.96 \text{ A} \\ 50\times 10^{-6} \quad Wb \,, & v_H > 7.96 \text{ A} \end{cases}$$

ossia:

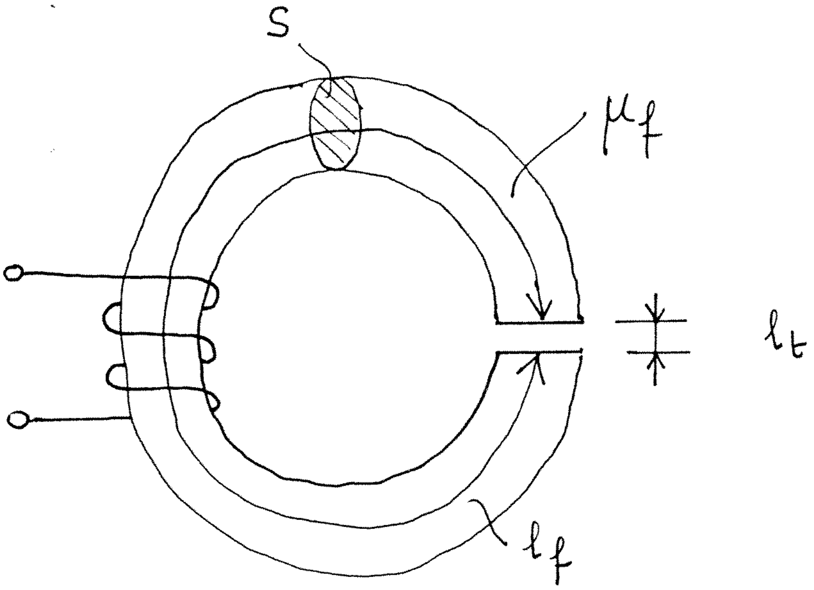




TRAFERRO

Un induttore realizzato con un nucleo ferromagnetico o ferrimagnetico di materiale dolce presenta quindi tipicamente una caratteristica non lineare. In molte applicazioni elettroniche la nonlinearità è inaccettabile perché introduce distorsione. Si può ricorrere ad un accorgimento: interrompere il nucleo mediante un tratto molto breve in aria, detto TRAFERRO o INTRAFERRO. La riluttanza del nucleo si esprime allora, se il traferro ha lunghezza l_t e il resto del nucleo lunghezza l_f, e se $l_t \ll \sqrt{S}$, ossia se il traferro è molto corto rispetto alla sezione del nucleo (cosa che consente di ipotizzare la continuità del flusso attraverso il traferro), come:

$$\mathcal{R} = \frac{l_f}{\mu_f S} + \frac{l_t}{\mu_0 S} = \mathcal{R}_f + \mathcal{R}_t$$



la riluttanza del ferro $\mathcal{R}_f$, anche se non lineare, è sempre $\mathcal{R}_f \ll \mathcal{R}_t$ perché $\mu_f \gg \mu_0$. Pertanto la riluttanza totale è somma di due contributi, dei quali il contributo eventualmente non lineare è trascurabile. La riluttanza totale è quindi:

$$\mathcal{R} \simeq \mathcal{R}_t = \frac{l_t}{\mu_0 S}$$

valore che si può rendere abbastanza piccolo (anche se sempre $\gg \mathcal{R}_f$) perché $l_t \ll l_f$. In definitiva è possibile ottenere alte L (ossia basse $\mathcal{R}$) attraverso un nucleo ferromagnetico o ferrimagnetico ~~sd~~ dotato di un traferro molto sottile. Si noti che regolando (ad es. mediante una vite) lo spessore del traferro è possibile modificare il valore della induttanza totale.