Laboratorio di Elettrotecnica
Reti del secondo ordine

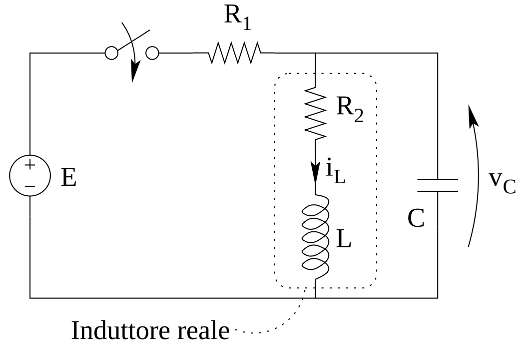
Autore: Dino Ghilardi

4 dicembre 2017

1.1 Reti del secondo ordine: Attività di laboratorio.

Innanzitutto analizziamo la rete da costruire risolvendo il problema analiticamente.

1.1.1 Testo



Si consideri la rete in figura, con:
$C = 22\mu F$
$R_1 = 200\,\Omega$
$R_2 = 8.5\,\Omega$
$L = 10\,mH$
$V_{in} = 5V$
Sapendo che l'interruttore si chiude per t=0, calcolare l'andamento nel tempo delle variabili di stato ($v_C(t)$ ed $i_L(t)$)

1.1.2 Soluzione analitica

Scriviamo le duali delle variabili di stato in funzione delle variabili di stato come:

$$i_C = i_{R1} - i_L = \frac{E - v_C}{R_1} - i_L$$

Sostituiamo la relazione costitutiva del condensatore ottenendo

$$C\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{R_1}v_C - i_L + \frac{E}{R_1}$$

$$\boxed{\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{R_1 C}v_C - \frac{1}{C}i_L + \frac{E}{R_1 C}}$$

Per la seconda equazione, analogamente,

$$v_L = v_C - R_2 i_L$$

$$L\frac{di_L}{dt} = v_C - R_2 i_L$$

$$\boxed{\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}v_C - \frac{R_2}{L}i_L}$$

I valori iniziale saranno nulli in quanto ad interruttore aperto la serie di interruttore e generatore è equivalente ad un circuito aperto.

I valori asintotici si ottengono sostituendo al condensatore un circuito aperto ed all'induttore un corto circuito. Con un partitore di tensione otteniamo

$$v_{C\infty} = E\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{85}{417}$$

Con una Legge di ohm sulla serie $R_1 + R_2$ otteniamo la corrente nell'induttore:

$$i_{L\infty} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{10}{417}$$

Equazione di stato (in forma simbolica)

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E}{R_1 C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori dei componenti otteniamo

- $-\frac{1}{R_1C} = -\frac{1}{200\Omega \cdot 22\mu F} = -\frac{1000000}{2200} = \frac{10^4}{44}$
- $-\frac{1}{C} = -\frac{1}{22\mu F} = -\frac{1000000}{22}$
- $\frac{1}{L} = \frac{1}{10mH} = 100$
- $-\frac{R_2}{L} = -\frac{8{,}5\Omega}{10mH} = -\frac{8500}{10} = -850$
- $\frac{E}{R_1C} = \frac{5 \cdot 10^4}{44} = \frac{10000}{44}$

Equazione di stato (in forma matriciale)

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{10000}{44} & -\frac{1000000}{22} \\ 100 & -850 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{50000}{44} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Valori iniziali	Valori asintotici
$v_C(0) = 0$	$v_{C\infty} = \frac{85}{417}$
$i_L(0) = 0$	$i_{L\infty} = \frac{10}{417}$

La traccia della matrice di stato è:

$$T = a_{11} + a_{22} = -1077, 27$$

Il determinante della matrice di stato è:

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 4, 73864e + 06$$

Essendo $T < 0$ e $\Delta > 0$ il sistema è stabile Il coefficiente di smorzamento è:

$$\alpha = -\frac{1}{2}T = 538, 636$$

La pulsazionedi risonanza é:

$$\omega_0^2 = \Delta = 4, 73864e + 06$$

L'equazione caratteristica è:

$$S^2 + 2\alpha S + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow S^2 + 1077, 27S + 4, 73864e + 06 = 0$$

La quale ha come soluzioni (frequenze naturali)

$$S = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \Rightarrow S = \begin{cases} -538, 636 - j2109, 15 \\ -538, 636 + j2109, 15 \end{cases}$$

Avendo radici complesse e coniugate, la soluzione sará del tipo:

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[A_1 cos\left(\beta t\right) + A_2 sin\left(\beta t\right)\right] + x_\infty$$

In particolare otteniamo

$$\begin{cases} v_C(t) = e^{-\alpha t}\left[A_1 cos\left(\beta t\right) + A_2 sin\left(\beta t\right)\right] + v_{C\infty} \\ i_L(t) = e^{-\alpha t}\left[A_3 cos\left(\beta t\right) + A_4 sin\left(\beta t\right)\right] + i_{L\infty} \end{cases}$$

Calcoliamo quindi i coefficienti che compaiono in tale relazione: Calcolo di β:

$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{4, 73864e + 06 - 538, 636^2} = \sqrt{4, 44851e + 06} = 2109, 15$$

Calcolo dei coefficienti A_x: Valutando le soluzioni per $t = 0$, basandoci sulle condizioni iniziali otteniamo

$$v_C(0) = e^0 \left[A_1 cos\left(0\right) + A_2 sin\left(0\right)\right] + v_{C\infty} \Rightarrow 0 = A_1 + \frac{85}{417} \Rightarrow A_1 = -0,203837$$

e

$$i_L(0) = e^0 \left[A_3 cos\left(0\right) + A_4 sin\left(0\right)\right] + i_{L\infty} \Rightarrow 0 = A_3 + \frac{10}{417} \Rightarrow A_3 = -0,0239808$$

Valutiamo le equazioni di stato per $t = 0$, ottenendo per la prima equazione:

$$\left.\frac{d}{dt}v_C\right|_{t=0} = a_{11}v_C\left(0\right) + a_{12}i_L\left(0\right) + c_1 = \left(-\frac{10000}{44}\right)\cdot 0 + \left(-\frac{1000000}{22}\right)\cdot 0 + \frac{50000}{44} = 1136,36$$

Per la seconda equazione:

$$\left.\frac{d}{dt}i_L\right|_{t=0} = a_{21}v_C\left(0\right) + a_{22}i_L\left(0\right) + c_2 = 100\cdot 0 + (-850)\cdot 0 + 0 = 0$$

Derivando le soluzioni:

$$\frac{d}{dt}v_C = \frac{d}{dt}\left\{e^{-\alpha t}\left[A_1\cos\left(\beta t\right) + A_2\sin\left(\beta t\right)\right]\right\} =$$

$$-\alpha e^{-\alpha t}\left[A_1\cos\left(\beta t\right) + A_2\cos\left(\beta t\right)\right] + e^{-\alpha t}\left[-A_1\beta\sin\left(\beta t\right) + A_2\beta\cos\left(\beta t\right)\right]$$

Valutandola in $t = 0$ otteniamo:

$$\left.\frac{d}{dt}v_C\right|_{t=0} = -\alpha A_1 + \beta A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{\beta}\left(\left.\frac{d}{dt}v_C\right|_{t=0} + \alpha A_1\right)$$

Analogamente per l'altra variabile di stato si ottiene

$$\left.\frac{d}{dt}i_L\right|_{t=0} = -\alpha A_3 + \beta A_4 \Rightarrow A_4 = \frac{1}{\beta}\left(\left.\frac{d}{dt}i_L\right|_{t=0} + \alpha A_3\right)$$

Sostituendo i valori ottenuti in precedenza otteniamo:

$$A_2 = \frac{1}{2109,15}\left(1136,36 + 538,636\cdot(-0,203837)\right) = 0,486722$$

$$A_4 = \frac{1}{2109,15}\left(0 + 538,636\cdot(-0,0239808)\right) = -0,00612424$$

Soluzione completa:

$$v_C(t) = e^{-538,636t}\left[-0,203837\cos(2109,15t) + 0,486722\sin(2109,15t)\right] + \frac{85}{417}$$

$$i_L(t) = e^{-538,636t}\left[-0,0239808\cos(2109,15t) - 0,00612424\sin(2109,15t)\right] + \frac{10}{417}$$

1.1.2.1 Grafico della tensione sul condensatore.

Le esponenziali di "inviluppo" di $v_C(t)$ avranno una ampiezza pari a:

$$A_{inv} = \left(\sqrt{A_1^2 + A_2^2}\right) = \sqrt{0,203837^2 + 0,486722^2} = 0,527681559...$$

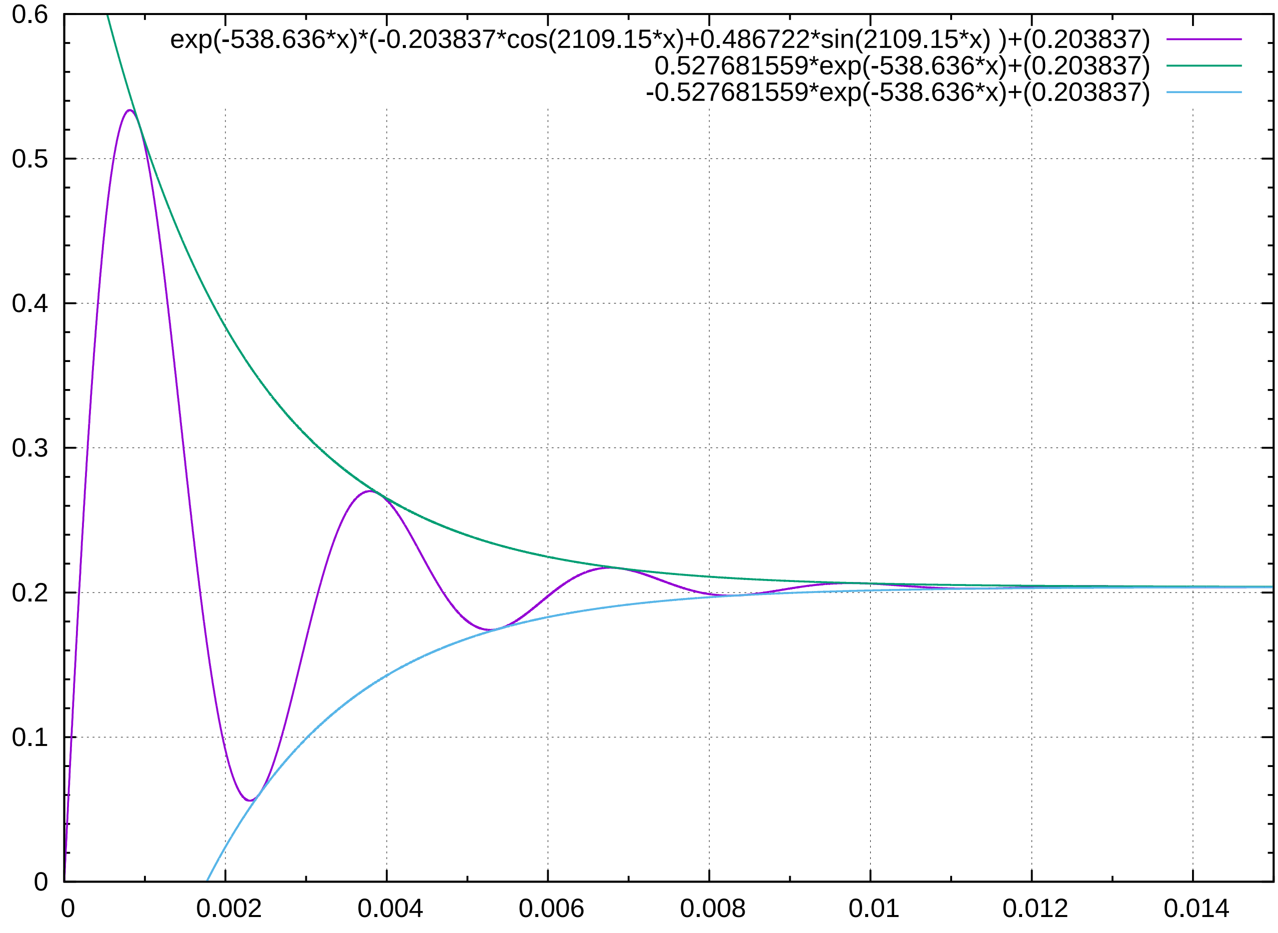
quindi l'inviluppo della funzione sarà

$$inv(t) = \pm A_{inv} \cdot e^{-\alpha t} + v_{C\infty} = \pm 0,527681559 \cdot e^{-538,636t} + \underbrace{0,20383693}_{\frac{85}{417}}$$

le tangenti alle esponenziali di inviluppo intersecheranno il valore asintotico dopo un tempo

$$\Delta t = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{538,636} s = 1,856541\, ms$$

dall'istante di tempo in cui è stata fatta partire la tangente alla curva, ed il grafico ottenuto sarà



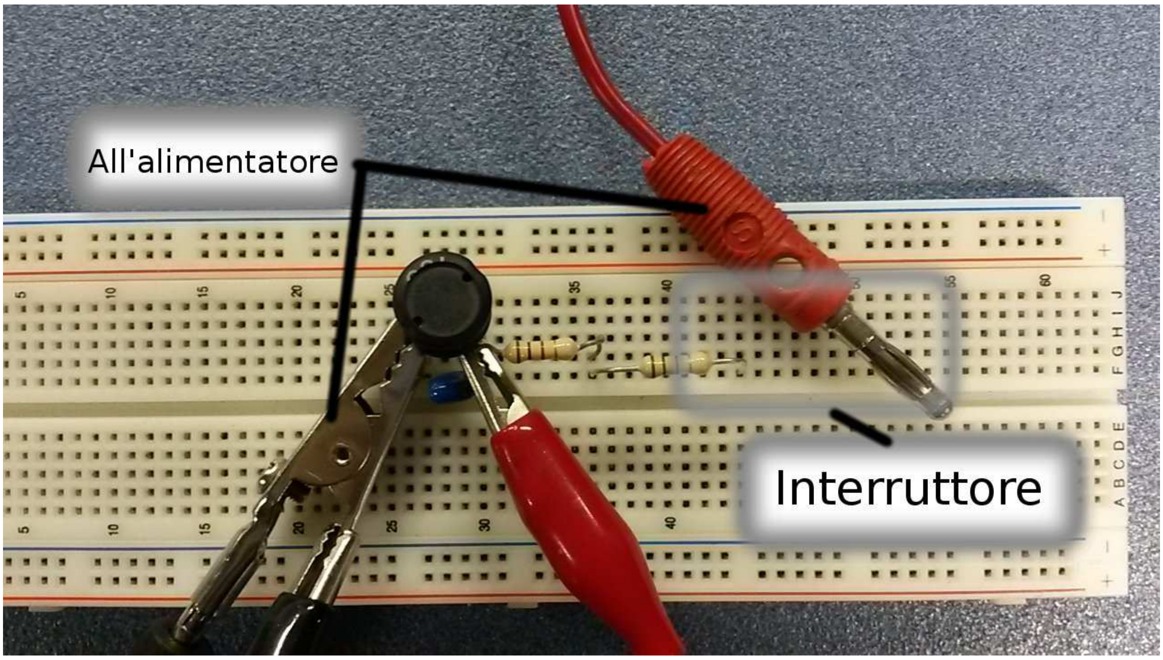
1.1.3 Simulazione matlab.

...si rimanda al documento relativo per la simulazione con Matlab.

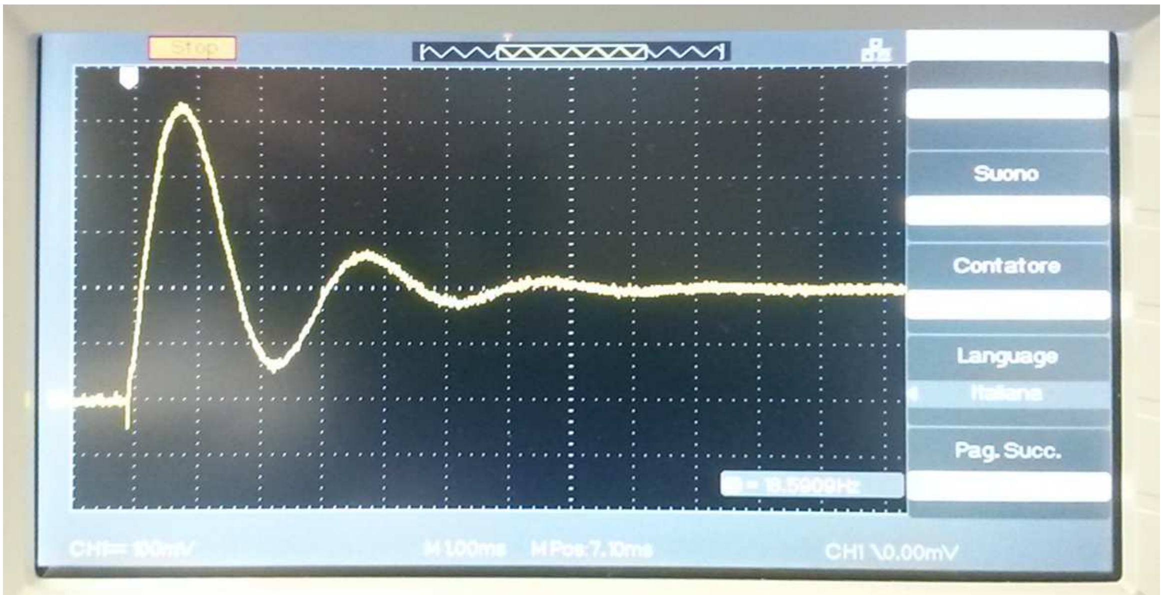
1.1.4 Misura della tensione sul condensatore nel transitorio di chiusura dell'interruttore.

Esempio di montaggio su breadboard del circuito. Si noti che:

- sono stati utilizzati due resistori da $100\,\Omega$ per realizzare il resistore da $200\,\Omega$
- il resistore da $8.5\,\Omega$ non è montato in quanto dato dalla resistenza interna dell'induttore (componente nero a sinistra)
- l'interruttore è realizzato chiudendo il circuito manualmente mettendo in contatto il connettore banana rosso con il terminale più a destra del resistore da $100\,\Omega$



Andamento della tensione sul condensatore ($v_C(t)$).



Nota: le impostazioni di trigger visibili sullo schermo sono state cambiate rispetto a quelle utilizzate realmente al fine di farle ricavare durante l'esperimento.