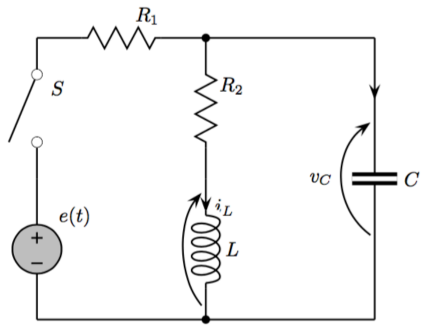
Simulazione della risposta in transitorio di un circuito RLC del II ordine (usando le equazioni di stato)



L'interruttore S si chiude in $t_0 = 0s$. Le equazioni di stato per questo circuito sono (per $t > 0$):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1 C} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1 C} \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$

avendo posto $x_1 = v_C$ e $x_2 = i_L$.

Parametri del circuito

```
clc;
clear all;
R1=200;
R2=8.5; %resistenza parassita dell'induttore misurata sul dispositivo
C=22e-6;
L=9.5e-3; %valore misurato sul dispositivo

vc0= 0.0;          % condizione iniziale sul condensatore
il0 = 0.0;         % condizione iniziale sull'induttore

%Scrivere la Matrice di stato
%A =
%Scrivere la Matrice degli ingressi
%B =
```

Parametri per la simulazione

```

```

Specifica dell'ingresso:

```
%ingresso costante
E = 5;        %ampiezza dell'ingresso
%costuire il vettore dell'ingresso
%u=
```

Possibili metodi di integrazione

- Integrazione dell'equazione di stato con Forward Euler (FE)

$$\left(\frac{\mathbf{x_{n+1}} - \mathbf{x_n}}{\mathbf{h}}\right) = \mathbf{Ax_n} + \mathbf{Bu_n}$$

da cui, risolvendo rispetto ad $\mathbf{x}_{n+1}$ si ha:

$$\mathbf{x}_{n+1} = (\mathbf{I} + \mathbf{hA})\mathbf{x_n} + \mathbf{hBu_n}$$

- Integrazione dell'equazione di stato con Backward Euler (BE)

$$\left(\frac{\mathbf{x_{n+1}} - \mathbf{x_n}}{\mathbf{h}}\right) = \mathbf{Ax_{n+1}} + \mathbf{Bu_{n+1}}$$

da cui, risolvendo rispetto ad $\mathbf{x}_{n+1}$ si ha:

$$\mathbf{x}_{n+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{hA})^{-1}(\mathbf{x_n} + \mathbf{hBu_{n+1}})$$

- Integrazione dell'equazione di stato con Trapezoidal rule (TR)

$$\left(\frac{\mathbf{x_{n+1}} - \mathbf{x_n}}{\mathbf{h}}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{Ax_n} + \mathbf{Bu_n} + \mathbf{Ax_{n+1}} + \mathbf{Bu_{n+1}})$$

da cui, risolvendo rispetto ad $\mathbf{x}_{n+1}$ si ha:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \left(\mathbf{I} - \frac{h\mathbf{A}}{2}\right)^{-1}\left(\left(\mathbf{I} + \frac{h\mathbf{A}}{2}\right)\mathbf{x}_n + \frac{h\mathbf{B}}{2}(\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n+1})\right)$$

Simulazione della risposta ad ingresso costante

- Integrazione con FE/BE/TR

```

```

Calcolo della soluzione analitica

$$v_C(t) = e^{-538,636t}\left[-0,203837\cos(2109,15t) + 0,486722\sin(2109,15t)\right] + \frac{85}{417}$$

$$i_L(t) = e^{-538,636t}\left[-0,0239808\cos(2109,15t) - 0,00612424\sin(2109,15t)\right] + \frac{10}{417}$$

Approfondimento: Calcolo della soluzione analitica con autovalori ed autovettori

La soluzione analitica di un circuito del secondo ordine può essere scritta (per frequenze naturali distinte) utilizzando autovalori ed autovettori della matrice di stato A nella forma:

$$\mathbf{x}(t) = (k_1 e^{s_1 t})\boldsymbol{\eta}_1 + (k_2 e^{s_2 t})\boldsymbol{\eta}_2 + \mathbf{x}_r$$

con $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ autovettori di A e s_1, s_2 i rispettivi autovalori. $\mathbf{x}_r$ è il vettore della soluzione di regime

```
%calcolo del vettore soluzione di regime stazionario (Ne+1)
%direttamente dall'equazione di stato essendo u un vettore di termini costante
%xr = -A\B*[E*ones(1,Ne+1)];

%Calcolo di autovalori ed autovettori della matrice di stato
%[AutoV, eigA] = eig(A);
```

Per il calcolo delle costanti k impongo le condizioni iniziali a t=0 ottenendo:

$$\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_r = k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}_1 & \boldsymbol{\eta}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\end{bmatrix}$$

```
%Calcolo delle costanti k1 e k2
%k= AutoV \ (xa(:,1) - xr(:,1));

%la soluzione analitica è dunque
%xa = AutoV*diag(k)*[exp(eigA(1,1)*etime); exp(eigA(2,2)*etime)] + xr;
%xa=real(xa); %la soluzione è reale!
```

Plot della soluzione numerica e di quella esatta

```
%carico i dati rilevati sperimentalmente in laboratorio
%load('datadump.mat','row','col');
```