

ELETTROTECNICA

FONDAMENTI DI CONVERSIONE ELETTROMECCANICA

4. PRINCIPI DI FUNZIONAMENTO DELLE MACCHINE ELETTRICHE

*Appunti dalle lezioni di Elettrotecnica del
prof. **Giovanni Ghione** al Politecnico di Milano*

MACCHINE ELETTRICHE

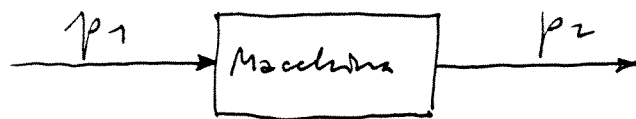
Sono dispositivi che convertono:

A) potenza elettrica in potenza meccanica
(MOTORI
(MACCHINE))

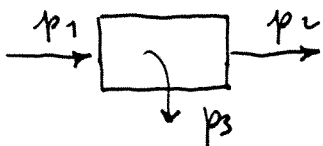
B) potenza meccanica in potenza elettrica
(GENERATORI)

C) potenza elettrica DC in potenza elettrica AC e
viceversa
(CONVERTITORI)

D) potenza elettrica a V_1, i_1 in potenza elettrica
a V_2, i_2 e viceversa
(TRASFORMATORI)



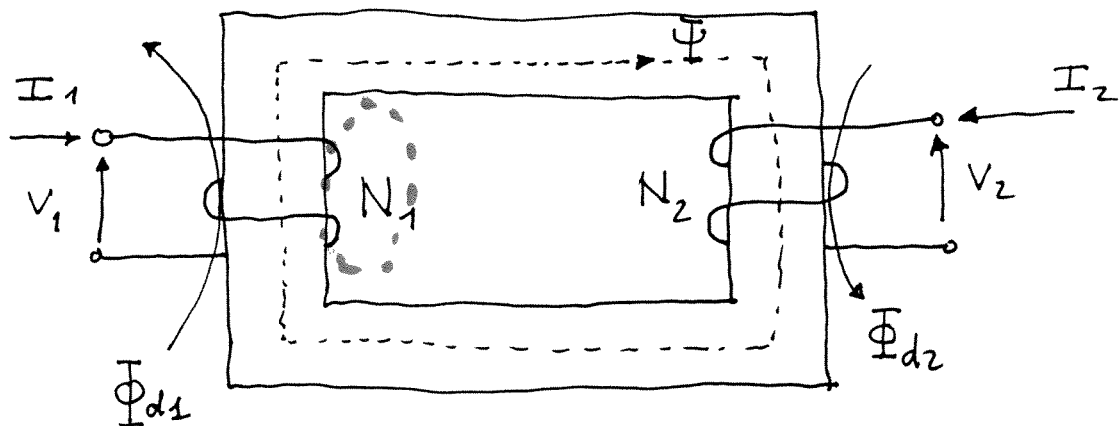
Macchine, generatori, trasformatori sono realizzati mediante materiali magnetici. I convertitori di potenza in corrente continua in potenza alla frequenza f sono oggi realizzati con apparecchiature elettroniche (CONVERTER). Di solito le macchine sono oggetti RECIPROCI e REVERSIBILI, almeno quando realizzate mediante materiali magnetici. Vedremo in seguito l'argomento delle AZIONI MECCANICHE in campi elettrici e magnetici (conversione di potenza meccanica in potenza elettrica/magnetica e viceversa); per prima cosa consideriamo il funzionamento dei trasformatori. Per tutte le macchine vi sono PERDITE DI POTENZA (in calore, etc.); si ha:



$$p_2 + p_3 = p_1; \quad \eta = \text{EFFICIENZA} = \frac{p_2 - p_3}{p_1}$$

TRASFORMATORE

È una macchina elettrica costituita da due avvolgimenti (trasformatore monofase) o da più coppie di avvolgimenti (trasformatore poli-fase) strettamente avvolti su un nucleo magnetico realizzato con materiale magnetico dolce. Si suppone che il trasformatore lavori alimentato da tensioni e correnti sinusoidali. Uno schema di principio (non necessariamente uguale alla realizzazione pratica, in cui gli avvolgimenti sono di solito sovrapposti) è:



Si sono indicati i flussi associati a tutte le grandezze; per semplicità, si suppone che il nucleo sia di materiale magnetico lineare anche se questo non è mai esattamente vero in pratica. Detta $R = L / \mu_0 \mu_r S$ la riluttanza totale del nucleo, si ha:

Φ_{d1} → flusso di dispersione della spira 1, ossia non concatenato con la spira 2

$$\Phi_{d1} = L_{d1} I_1$$

L_{d1} induttanza di dispersione primaria

Φ_{d2} → flusso di dispersione spira 2, ossia non concatenato con la spira 1:

$$\Phi_{d2} = L_{d2} I_2$$

L_{d2} induttanza di dispersione secondaria

da cui il flusso totale concatenato con le due spire $\bar{\Psi}$:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_{d1} + N_1 \bar{\Psi} = L_{d1} I_1 + \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} I_1 + \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} I_2 \\ &= (L_{d1} + \tilde{L}_{11}) I_1 + M I_2 \\ &= L_{11} I_1 + M I_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \Phi_{d2} + N_2 \bar{\Psi} = L_{d2} I_2 + \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} I_1 + \frac{N_2^2}{\mathcal{R}} I_2 \\ &= M I_1 + (L_{d2} + \tilde{L}_{22}) I_2 \\ &= M I_1 + L_{22} I_2\end{aligned}$$

Si ha quindi: $L_{11} = L_{d1} + \tilde{L}_{11}$, $L_{22} = L_{d2} + \tilde{L}_{22}$, da cui

● matrice induttanza del trasformatore:

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{L}}_d + \tilde{\underline{\underline{L}}}$$

↓

ind. dispersive

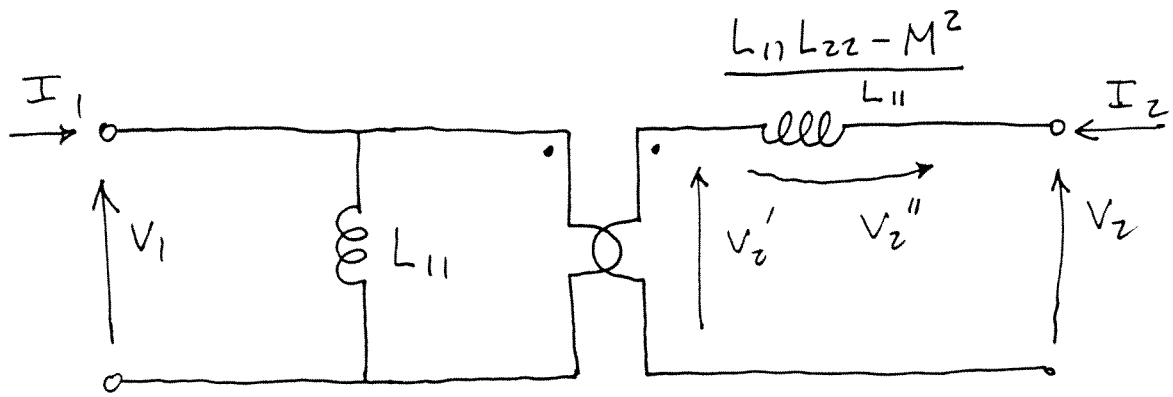
$$\begin{pmatrix} L_{d1} & 0 \\ 0 & L_{d2} \end{pmatrix}$$

↘

ind. senza flusso disperso

$$\begin{pmatrix} \tilde{L}_{11} & M \\ M & \tilde{L}_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 \\ N_1 N_2 & N_2^2 \end{pmatrix}$$

Il circuito equivalente con trasformatore ideale del trasformatore reale $\bar{\Psi}$ allora, tenendo conto delle induttanze di dispersione:

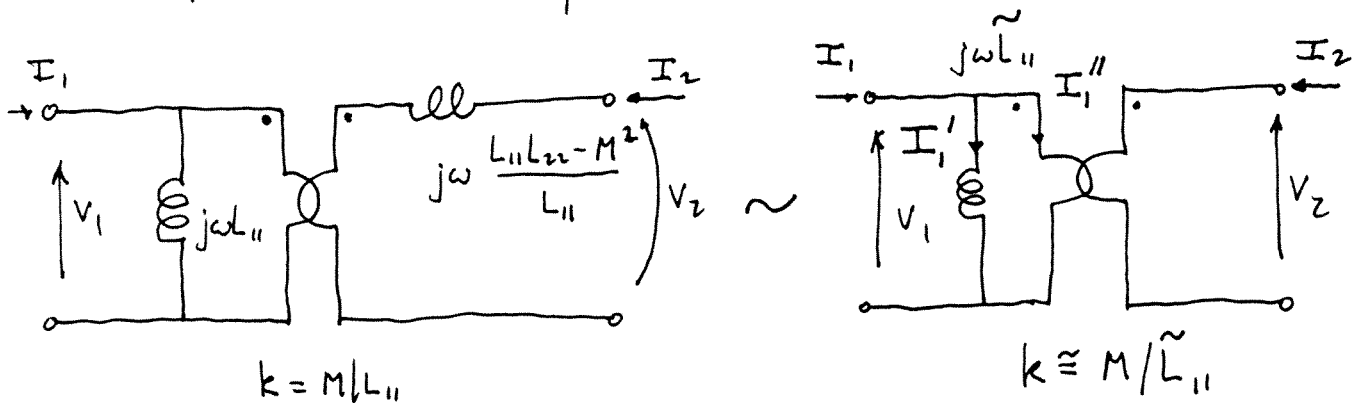


$$k = V_2' / V_1 = M / L_{11}$$

Passando dai flussi alle tensioni:

$$\begin{cases} V_1 = j\omega \Phi_1 = j\omega L_{11} I_1 + j\omega M I_2 \\ V_2 = j\omega \Phi_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_{22} I_2 \end{cases}$$

Se l'induttanza di dispersione primaria e secondaria è trascurabile, come accade in pratica, si ha:



ossia:

$$k = \frac{V_2}{V_1} \cong \frac{M}{L_{11}} = \frac{N_1 N_2}{N_1^2} = \frac{N_2}{N_1}$$

ossia: in assenza di flusso disperso il trasformatore si comporta, per quanto riguarda il rapporto di tensioni, come un trasformatore IDEALE con

$$k = N_2 / N_1$$

Per quanto riguarda le correnti si ha:

$$I_2 = -\frac{1}{k} I_1'' = -\frac{N_1}{N_2} \left(I_1 - \frac{V_1}{j\omega L_{11}} \right)$$

ovvia, per quanto riguarda le coseno, il trasformatore reale si comporta come un trasformatore ideale per:

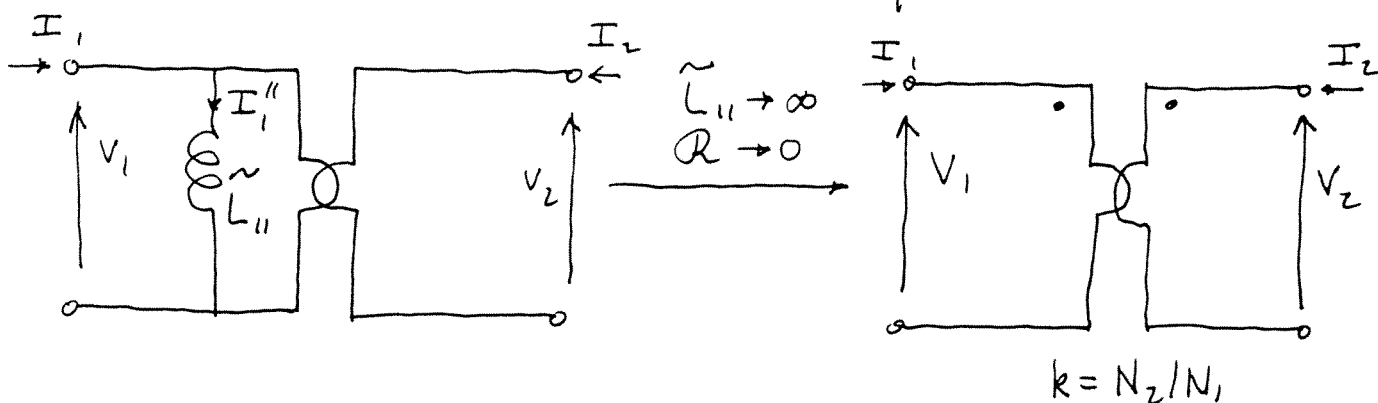
$$j\omega \tilde{L}_{11} \rightarrow \infty \text{ ovvia per}$$

$$\tilde{L}_{11} \rightarrow \infty, R \rightarrow 0, \mu_r \rightarrow \infty$$

In questo caso infatti la CORRENTE DI MAGNETIZZAZIONE

$$I_1' = \frac{V_1}{j\omega \tilde{L}_{11}} = \frac{\Phi_1}{\tilde{L}_{11}}$$

che serve a creare un flusso nel nucleo magnetico diviene trascurabile, al limite nulla, e si ha quindi:



si noti che nel trasformatore ideale si ha:

$$\begin{aligned} N_1 I_1 + N_2 I_2 &= 0 \\ V_2 N_1 &= V_1 N_2 \end{aligned}$$

Per semplicità si indica spesso:

$L_{11} \rightarrow$ "induttanza di magnetizzazione"

$\frac{L_{11}L_{22} - M^2}{L_{11}} \rightarrow$ "induttanza di dispersione"

BANDA DEL TRASFORMATORE. Per $\omega \rightarrow 0$ $j\omega L_{11} \rightarrow 0$ sempre. Pertanto il trasformatore reale NON FUNZIONA IN DC.

Molte per $\omega \rightarrow \infty$:

$$j\omega \frac{L_{11}L_{22} - M^2}{L_{11}} \rightarrow \infty$$

per cui il trasformatore resta aperto al secondario. In definitiva i trasformatori reali sono caratterizzati da una BANDA PASSANTE $\omega_1 - \omega_2$ o $f_1 - f_2$ nella quale il dispositivo funziona correttamente; al di fuori di questa banda il trasformatore non opera perché :

per $f \ll f_1$ il primario è cortocircuitato

per $f \gg f_2$ il secondario è aperto.

PERDITE NEL TRASFORMATORE

Il trasformatore reale è sede di fenomeni dissipativi che causano perdite di potenza. Queste perdite sono localizzate:

A) nei fili (avvolgimenti) che presentano una resistenza serie R_1 e R_2 . La perdita totale è data da:

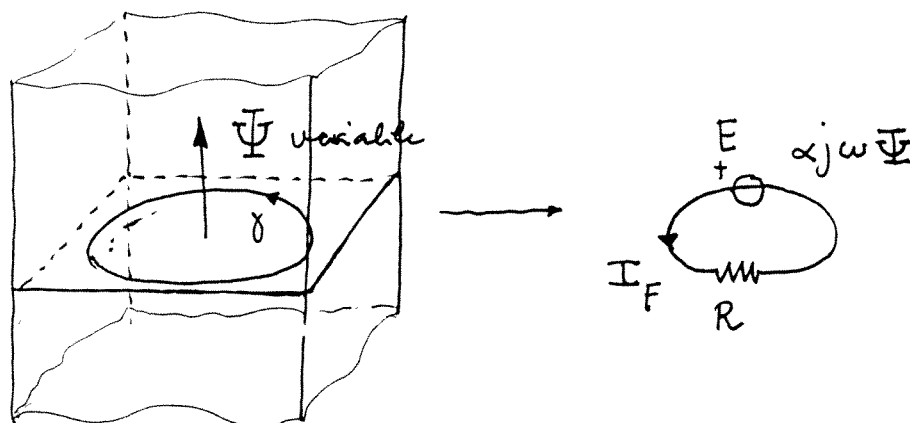
$$\begin{aligned} P_{\text{fili}} &= R_1 |I_1|^2 + R_2 |I_2|^2 = \\ &\cong R_1 |I_1|^2 + (R_2/k^2) |I_1|^2 = \\ &= (R_1 + R_2/k^2) |I_1|^2 = \\ &= R_{\text{eq}}' |I_1|^2 \cong R_{\text{eq}} |I_2|^2 \end{aligned}$$

ossia la perdita nei fili può essere tenuta in conto da una resistenza serie posta sul primario o sul secondario del trasformatore; sceglieremo la soluzione sul secondario per semplicità.

B) Nel nucleo. Tali perdite sono di due tipi:

$$\delta \alpha - 5$$

B1) Perdite per correnti parassite: sono dovute al fatto che il nucleo magnetico ha spesso una conducibilità non trascurabile; ed è sede di flusso magnetico variabile; si inducono in esso delle forze elettromotrici che tendono a far circolare correnti di conduzione (dette correnti di Foucault) che causano dissipazione di potenza.



In generale si ha:

$$|I_F| \propto \frac{\omega \Phi}{R} = \frac{\omega L_{11} |I_1''|}{R} = \frac{|V_1|}{R}$$

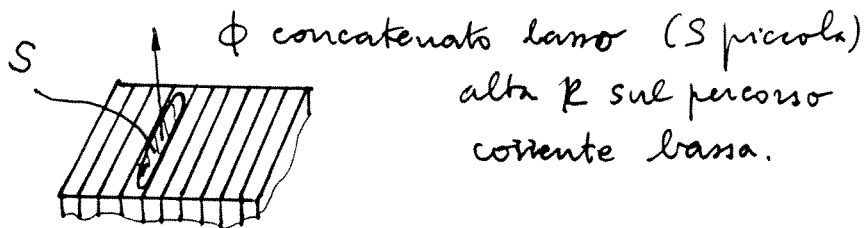
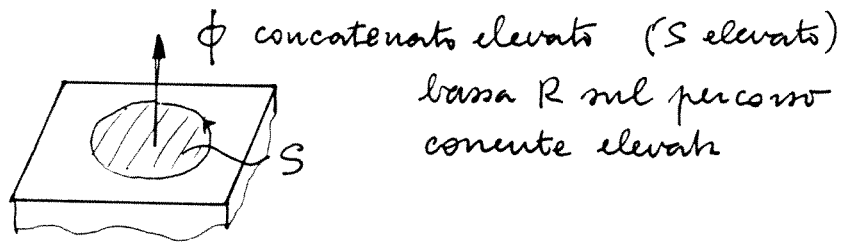
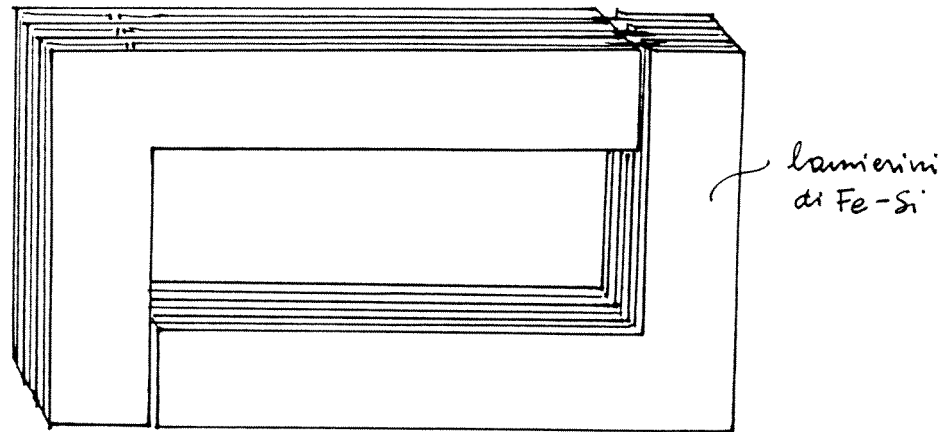
↑
correnti di Foucault

cioè LA POTENZA DISSIPATA DALLE CORRENTI DI FOUCAULT può essere associata ad una resistenza parallela posta all'ingresso del trasformatore. Detto B_{max} il flusso massimo nel nucleo, vale la formula empirica:

$$P_F \approx k_F f^2 B_{max}^{1.6 \div 2}$$

Per diminuire la P_F e le $|I_F|$ si può aumentare R mediante 1) materiali magnetici ad alta resistenza, come le ferriti; 2) nuclei formati da lamierini

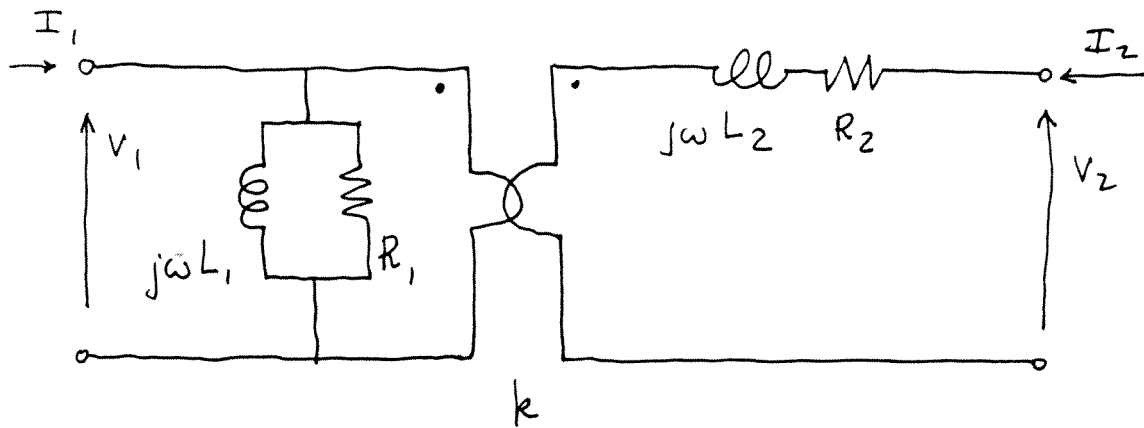
metallici rivestiti da una vernice isolante e accatastati.
 In questo modo diminuisce il flusso concatenato e aumenta
 la lunghezza del percorso resistivo che si oppone al passag-
 gio delle correnti di Foucault.



B2) Perdite per isteresi: sono dovute alla potenza dis-
 sipata per effetto della magnetizzazione e magne-
 tizzazione del materiale magnetico. Sono proporzionali
 all'area del ciclo di isteresi; anche questo si possono
 in prima approssimazione, assegnare ad un resistore
 in parallelo all'ingresso del trasformatore. Vale
 la formula empirica:

$$P_i \cong k_i f B_{max}^2$$

Si ha quindi il circuito equivalente approssimato del trasformatore con perdite:



ove:

$L_1 = L_{11}$ induttanza di magnetizzazione (alta)

$L_2 = \frac{L_{11}L_{22} - M^2}{L_{11}}$ induttanza di dispersione (bassa)

$k = \frac{M}{L_{11}} \approx \frac{N_2}{N_1}$ rapporto spire

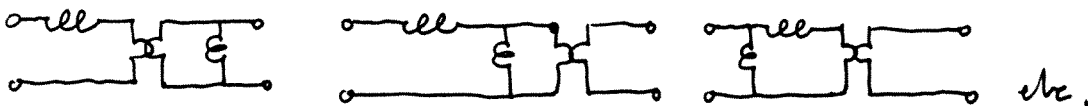
R_1 resistenza di perdita nel nucleo (alta)

R_2 resistenza di perdita nei fili (bassa)

nel trasf. IDEALE:

$$\begin{aligned} R_1 &\rightarrow \infty & R_2 &\rightarrow 0 \\ j\omega L_1 &\rightarrow \infty & j\omega L_2 &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE Usando equivalenze circuitali è possibile ricavare altre topologie per il circuito equivalente del trasf. reale:

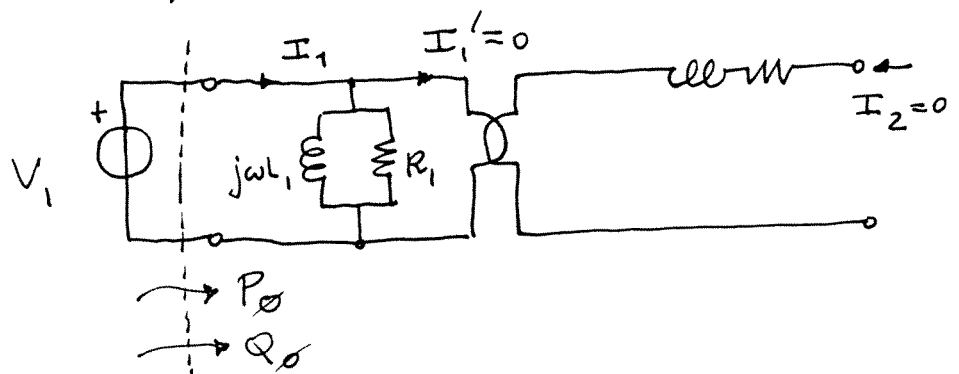


MISURA DEI PARAMETRI DEL CIRCUITO EQUIVALENTE

Un trasformatore reale è dimensionato per operare ad un insieme di tensioni e correnti nominali $V_{1n}, V_{2n}, I_{1n}, I_{2n}$. È abbastanza semplice ricavare i parametri del circuito equivalente effettuando due insiemi di misure:

- 1) PROVA A VUOTO
- 2) PROVA IN CORTO CIRCUITO

1) PROVA A VUOTO Il secondario del trasformatore è a vuoto, si alimenta il primario con una tensione V_1 (che viene variata da ϕ a V_{1n})



Grandezze misurate:

$ V_1 $	tensione ingresso
$ I_1 $	corrente ingresso
P_ϕ	potenza attiva assorbita

Si ha allora:

$$P_\phi = \frac{|V_1|^2}{R_1} \rightarrow R_1 = \frac{|V_1|^2}{P_\phi}$$

ma:

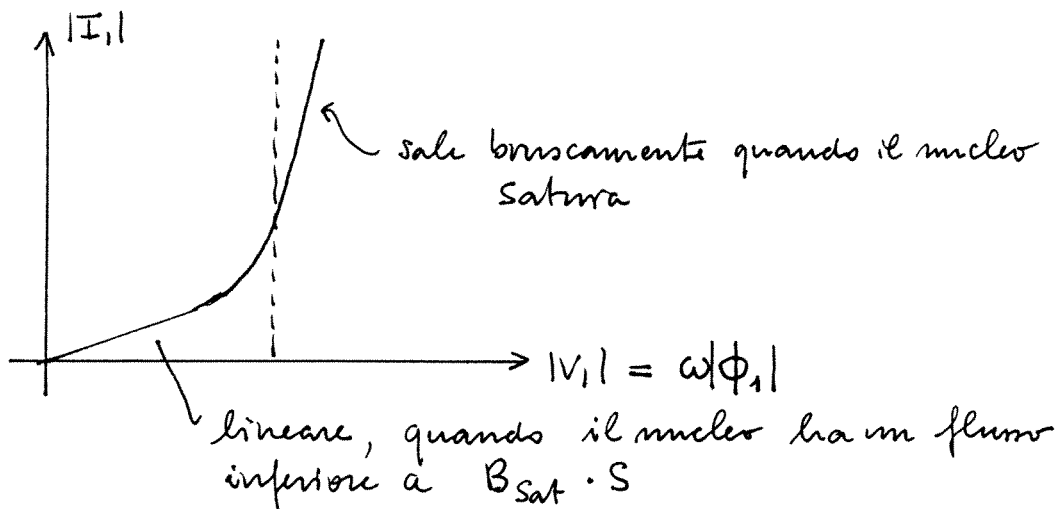
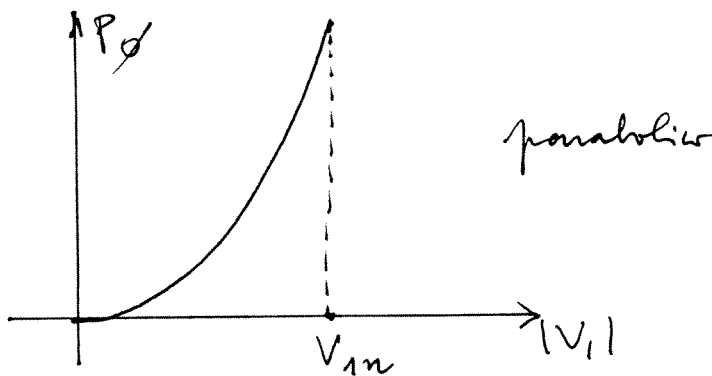
$$P_\phi = |V_1| |I_1| \cos \varphi_\phi \rightarrow \cos \varphi_\phi = \frac{P_\phi}{|V_1| |I_1|}$$

$$Q_\phi = |V_1| |I_1| \sin \varphi_\phi = P_\phi \tan \varphi_\phi$$

da cui:

$$X_1 = \omega L_1 = \frac{|V_1|^2}{Q_\phi} = \frac{|V_1|^2}{P_\phi \tan \varphi_\phi}$$

Per migliorare la precisione si possono effettuare misure al variare di V_1 ; si hanno gli andamenti:

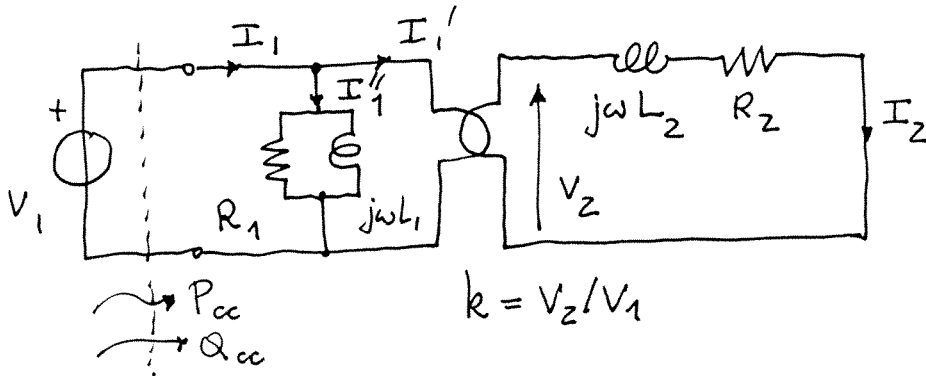


Chiaramente il parametro X_1 vale solo nella zona lineare, in saturazione l'induttanza è non lineare; si può sempre definire però:

$$X_1 \triangleq \frac{|V_{1n}|^2}{P_{\phi n} \tan \varphi_{\phi n}}$$

relativamente ai valori nominali:

2) PROVA IN CORTO CIRCUITO Il secondario è in corto e si alimenta il primario con una V_1 tale che $|V_1| \sim 7 \div 15 \% V_{1n}$ (molto minore di V_{1n} , per non danneggiare il trasformatore con una corrente troppo elevata). Si ha:



ossia:

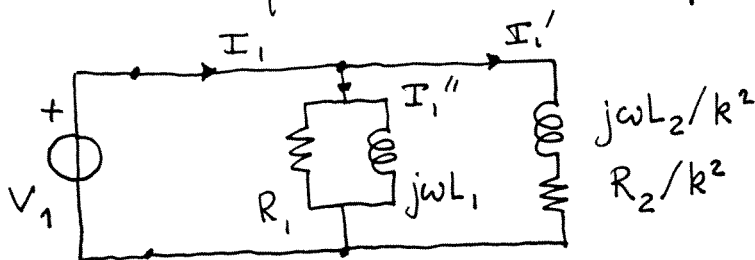
$$I_2 = \frac{1}{k} I_1'$$

$$V_2 = k V_1 = (R_2 + j\omega L_2) I_2$$

da cui:

$$V_1 = I_1' \frac{1}{k^2} (R_2 + j\omega L_2)$$

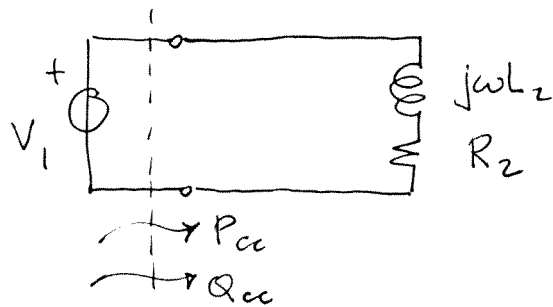
ossia il circuito equivalente diviso al primario:



ma:

$$\left| R_1 // j\omega L_1 \right| \gg \left| j\omega L_2 / k^2 + R_2 / k^2 \right|$$

perciò $Z_1 = R_1 // j\omega L_1$ è quasi un circuito aperto, mentre $Z_2 / k^2 = (j\omega L_2 + R_2) / k^2$ è quasi un corto circuito; di conseguenza si può semplificare il circuito come:



Le grandezze misurate sono ora:

$|V_1|$ tensione ingresso

$|I_1|$ corrente ingresso

P_{cc} potenza attiva assorbita

e si ha:

$$P_{cc} = |I_1|^2 R_2 \rightarrow$$

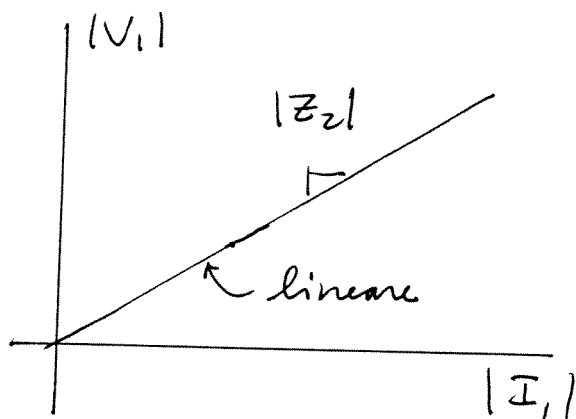
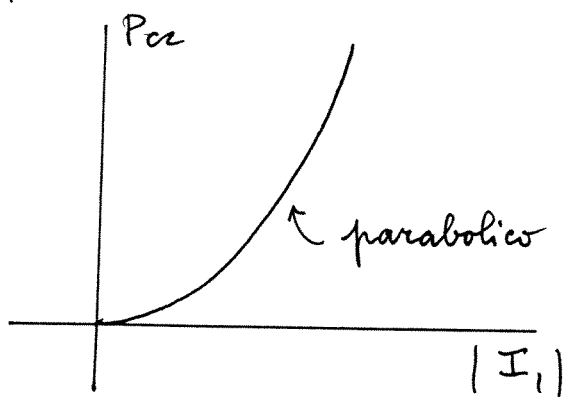
$$R_2 = \frac{P_{cc}}{|I_1|^2}$$

$$\cos \varphi_{cc} = \frac{P_{cc}}{|V_1| |I_1|}$$

$$Q_{cc} = P_{cc} \tan \varphi_{cc}$$

$$X_2 = \omega L_2 = \frac{Q_{cc}}{|I_1|^2} = \frac{P_{cc} \tan \varphi_{cc}}{|I_1|^2}$$

Perché l'induttanza L_2 è una induttanza di dispersione in aria o di solito lineare, variando $|V_1|$ si hanno allora i grafici:



DATI DI TARGA DEL TRASFORMATORE

Sono i parametri nominali del trasformatore:

$$\begin{aligned} \text{Potenza complessa nominale } A_n &= |V_{1n}| |I_{1n}| = \\ &= |V_{2n}| |I_{2n}| \end{aligned}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Tensioni nominali} \\ \text{correnti nominali} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} |V_{1n}|, |V_{2n}| \\ |I_{1n}|, |I_{2n}| \end{array}$
forniscono il rapporto di trasformazione:

$$k = |V_{2n}| / |V_{1n}|$$

$$\text{Parametri a vuoto: } \left\{ \begin{array}{l} I_0 \% = |I_0| / |I_n| \% \\ P_0 \% = P_0 / A_n \% \\ \cos \varphi_0 \end{array} \right.$$

sono riferiti a $|V_{1n}|, |V_{2n}|$
notare che sono dati validi per
prova sia al primario che al secondario

$$\text{Parametri di corto circuito: } \left\{ \begin{array}{l} V_{cc} \% = |V_{cc}| / |V_n| \% \\ \cos \varphi_{cc} \\ P_{cc} \% = P_{cc} / A_n \% \end{array} \right.$$

sono riferiti alla condizione di fusione
nominale $V_1 = V_{cc}, V_2 = 0$. Di
solito $V_{cc} \% \sim \pm 15$.

A seconda del tipo di trasformatore può convenire che $Z_2 = R_2 + j\omega L_2$
sia grande (relativamente) o piccola. Se Z_2 è grande introduce
una ulteriore caduta prima del carico (cioè $V_2 \neq kV_1$);
se Z_1 è piccola in caso di questo con corto circuito al secondario
la corrente sale molto e può danneggiare il trasformatore.

ESEMPIO Un trasformatore monofase ha dati di targa:

$$A_n = 1 \text{ kVA}$$

$$|V_{1n}| = 10 \text{ V}$$

$$|V_{2n}| = 500 \text{ V}$$

$$I_o \% = 0.1 \%$$

$$V_{cc} \% = 10 \%$$

$$P_o \% = 0.1 \%$$

$$P_{cc} \% = 0.5 \%$$

$$\cos \varphi_o = 0.9$$

$$\cos \varphi_{cc} = 0.85$$

Ricavare il circuito equivalente a 50 Hz e stimare il rendimento.

Si ha:

$$k = |V_{2n}| / |V_{1n}| = 50$$

$$|I_{1n}| = 1000 / |V_{1n}| = 100 \text{ A}$$

$$|I_{2n}| = 1000 / |V_{2n}| = 2 \text{ A}$$

$$I_o = 0.1 \times 10^{-2} \times |I_{1n}| = 0.1 \text{ A}$$

$$P_o = 0.1 \times 10^{-2} \times A_n = 1 \text{ W}$$

$$V_{cc} = 1 \text{ V}$$

$$P_{cc} = 0.5 \times 10^{-2} \times A_n = 5 \text{ W}$$

da cui:

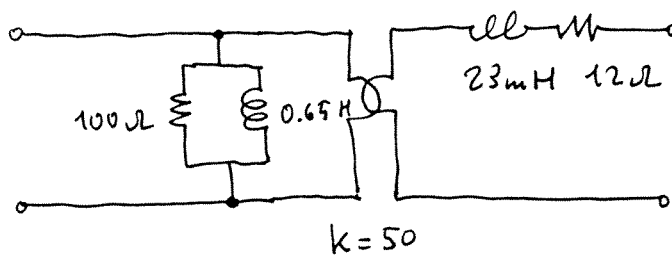
$$\begin{cases} R_1 = \frac{|V_{1n}|^2}{P_o} = \frac{100}{1} = 100 \Omega \\ X_1 = \frac{|V_{1n}|^2}{P_o \tan \varphi_o} = \frac{100}{1 \times 0.48} = 206 \Omega \end{cases}$$

poi $P_{cc} = |V_{cc}| |I_{cc}| \cos \varphi_{cc}$ da cui: $|I_{cc}| = P_{cc} / |V_{cc}| \cos \varphi_{cc}$
ovvero $|I_{cc}| = 0.65 \text{ A}$; poi:

$$\begin{cases} R_2 = P_{cc} / |I_{cc}|^2 = 12 \Omega \\ X_2 = P_{cc} \tan \varphi_{cc} / |I_{cc}|^2 = 7.33 \Omega \end{cases}$$

e infine: $L_1 = 0.65 \text{ H}$, $L_2 = 23 \text{ mH}$

Si ottiene quindi il circuito equivalente:

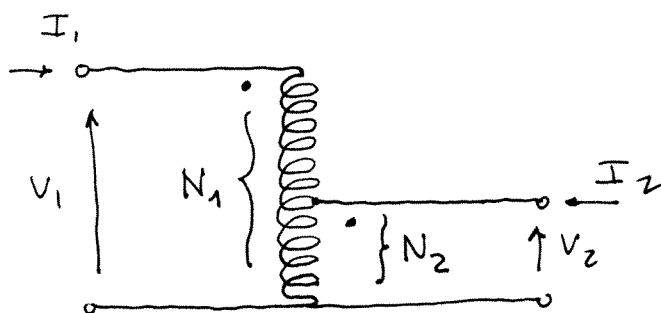


Per quanto riguarda il rendimento in condizioni nominali, la potenza dissipata al primario è semplicemente $P_{\phi} = 1 \text{ W}$. Per la potenza al secondario si ha $P_2 = |I_{2n}|^2 \cdot 12 = 48 \text{ W}$. In tutto pertanto $P_{diss} = 49 \text{ W}$ mentre, se il trasformatore è chiuso su un carico resistivo, $P_L \cong P_i = 1 \text{ kW}$; si ha allora:

$$\eta \cong \frac{P_i - P_{diss}}{P_i} = \frac{1000 - 49}{1000} \cong 95 \%$$

AUTOTRASFORMATORE

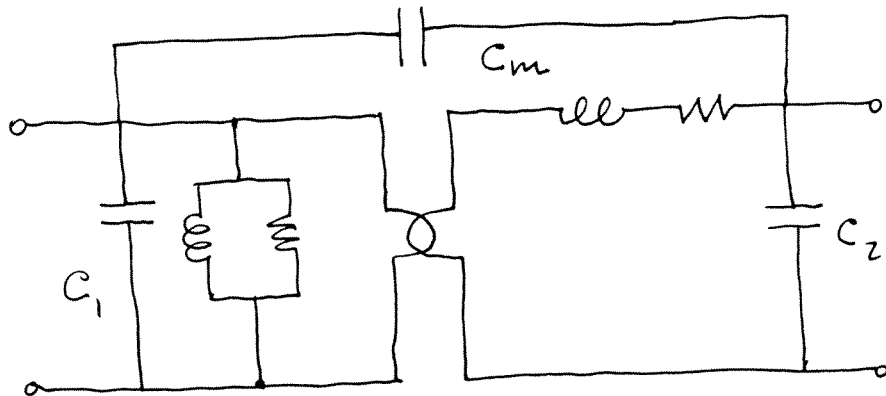
È un trasformatore in cui primario e secondario fanno parte dello stesso avvolgimento:



Si ha così una struttura collegata a bipolo in cui $N_2 \leq N_1$. Non c'è isolamento fra primario e secondario, ma questa struttura è vantaggiosa quando il rapporto di trasformazione desiderato è molto prossimo all'unità.

TRASFORMATORE PER ALTA FREQUENZA

Sono di solito con nucleo di ferrite, e nel circuito equivalente bisogna tener conto del fatto che vi sono capacità di accoppiamento sia al primario, che al secondario, che fra i due avvolgimenti; si ottiene così il circuito equivalente:



AZIONI MECCANICHE

Campi elettrici e magnetici interagiscono con le cariche elettriche attraverso la manifestazione di una forza:

$$\underline{F} = q \underline{E} + q \underline{v} \times \underline{B}$$

↓ ↙

forza elettrostatica forza di Lorentz.

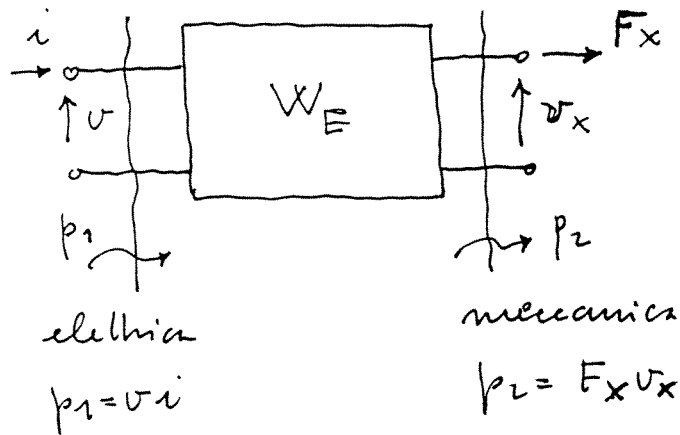
Quindi:

- 1) i campi elettrici agiscono su cariche sia in moto che ferme;
- 2) i campi magnetici agiscono solo su cariche in movimento.

L'analisi delle forze che si sviluppano in un sistema complesso è però difficile se si parte da una descrizione microscopica delle forze agenti sulle singole cariche in moto. Alternativamente, si può utilizzare un metodo energetico, più semplice. Il metodo energetico può essere esteso alla analisi di sistemi complessi come i motori elettrici; qui si farà applicazione solo a casi molto semplici, mentre l'analisi di motori e generatori sarà condotta in modo semiqualitativo.

FORZE IN CAMPI ELETTRICI. Consideriamo un bipolo in grado di immagazzinare energia elettrica (ad es. un condensatore) e nel quale si possano svolgere azioni meccaniche (forze, spostamenti, lavoro meccanico). Tale bipolo elettrico si può allora interpretare come un due porte in cui la porta di ingresso è una porta elettrica in senso stretto, la seconda porta è una porta meccanica caratterizzata da una forza F_x e da una velocità v_x del suo punto di applicazione. Supponiamo arbitrariamente di assegnare

alla velocità il ruolo di tensione ed alla forza il ruolo di corrente. Si ha allora la rappresentazione:



W_E è l'energia elettrica immagazzinata dal dipolo. Il bilancio energetico fornisce:

$$p_1 = p_2 + \frac{dW_E}{dt}$$

ma, per un condensatore lineare:

$$W_E = \frac{1}{2} C v^2$$

da cui:

$$p_1 = v i = v \frac{d}{dt}(Cv) = p_2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C v^2 \right) \quad \text{ovvia}$$

$$p_1 = v^2 \frac{dC}{dt} + \cancel{v C \frac{dv}{dt}} = p_2 + \frac{1}{2} v^2 \frac{dC}{dt} + \cancel{\frac{1}{2} C v \frac{dv}{dt} \cdot 2}$$

ovvia:

$$p_{\text{mecc}} = p_2 = \frac{1}{2} v^2 \frac{dC}{dt}$$

Poiché il sistema contiene parti in movimento la capacità può essere variabile nel tempo. Supponendo che C dipenda da t attraverso un parametro spaziale x , si ha

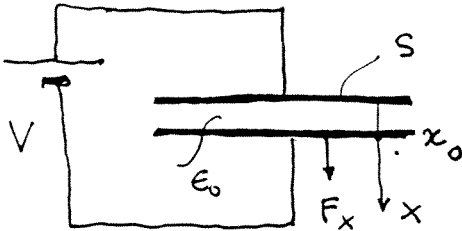
$$p_{\text{mecc}} = F_x v_x = \boxed{\frac{1}{2} v^2 \frac{dC}{dx}} \cdot \frac{dx}{dt} \underset{v_x}{=} \underset{\delta\beta - 2}{\quad}$$

da cui:

$$F_x = \frac{1}{2} v^2 \frac{dc}{dx}$$

ESEMPIO Calcolate la forza agente sulle armature di un condensatore posto a tensione V .

si ha:



$$C(x) = \frac{S\epsilon_0}{x}$$

$$F_x = - \frac{S\epsilon_0}{x^2} \cdot \frac{1}{2} V^2$$

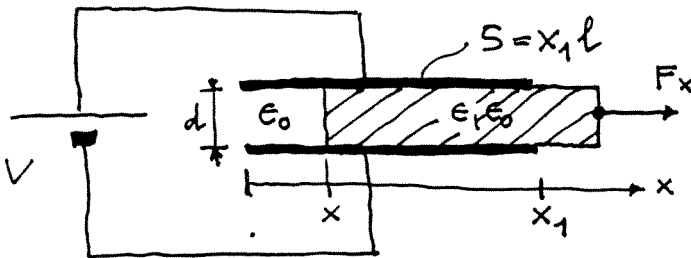
per cui, se la distanza è x_0 :

$$\rightarrow F_x = - \frac{S\epsilon_0 V^2}{2x_0^2} \leftarrow$$

tende ad avvicinare le armature.

ESEMPIO Calcolare la forza che agisce sul dielettrico di un condensatore quando questo viene spostato lateralmente.

si ha:



$$C \approx \frac{\epsilon_0 l}{d} \cdot x + \frac{\epsilon_0 \epsilon_r (x_1 - x) l}{d}$$

da cui:

$$\frac{dc}{dx} = \frac{\epsilon_0 l}{d} - \frac{\epsilon_0 \epsilon_r l}{d} = \frac{\epsilon_0 (1 - \epsilon_r) l}{d}$$

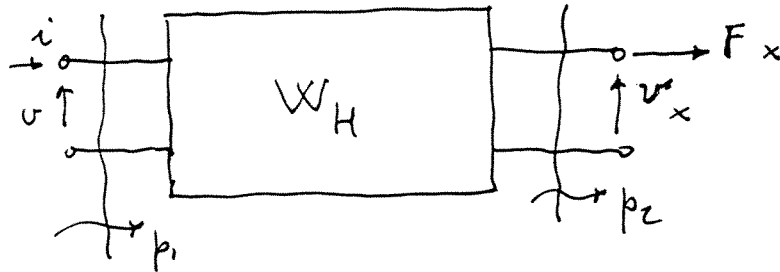
ossia:

$$F_x = - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) l}{d} V^2$$

quindi il dielettrico viene risucchiato fra le armature del condensatore ($F_x < 0$)

FORZE IN CAMPI MAGNETICI In pratica l'uso di forze in campi elettrici è scarsamente conveniente: infatti a questo scopo sono richiesti campi elevati e ϵ_r elevate. I primi sono pericolosi e soggetti a limitazioni (rigidità dielettrica); le seconde sono limitate a circa 100. Per questi motivi sono di interesse pratico molto più rilevante le azioni meccaniche in campi magnetici: infatti è possibile avere H, B molto elevati senza rischio di scarica, e i materiali magnetici hanno per grandissime, in grado di permettere una elevata densità di energia magnetica.

Si consideri allora un bipolo in grado di accumulare energia magnetica (ad es. un induttore). Per semplicità supponiamo che l'induttore sia lineare; si ha allora il circuito equivalente:



da cui:

$$p_1 = v i = i \frac{d}{dt}(L i) = p_2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right)$$

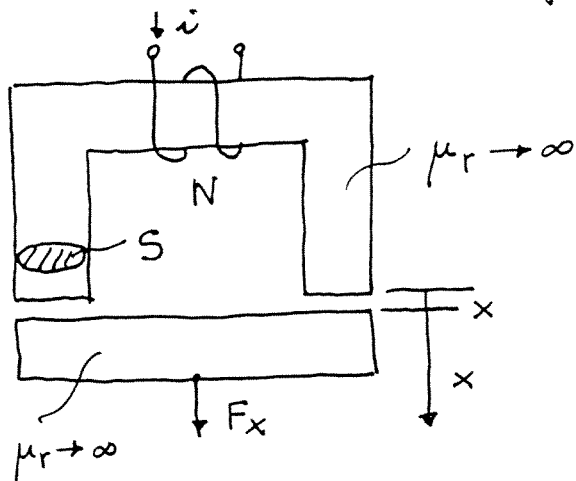
Si ottiene:

$$p_{mecc} = p_2 = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx}$$

ovvia, supponendo $L = L(x)$:

$$F_x = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx}$$

ESEMPIO Calcolare la forza agente sull'ancora di un relé:



Si ha:

$$L = \frac{N^2}{R_f + R_E} = \frac{N^2}{\frac{2x}{\mu_0 S}}$$

\uparrow traferro
 se $\mu_r \rightarrow \infty$

da cui:

$$F_x = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} = -\frac{1}{2} i^2 \frac{\mu_0 S N^2}{2x^2} = -\frac{1}{2} L i^2 \frac{1}{x}$$

cioè l'ancora è attratta. Si noti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L i^2 &= \frac{1}{2} \frac{\mu_0 S}{2x} \cdot N i \cdot N i = \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\mu_0 N i \frac{1}{2x}}_{H_E \text{ nel traferro}} \cdot \underbrace{2x \cdot S}_{\text{volume traferro}} \cdot \underbrace{N i \frac{1}{2x}}_{H_E \text{ nel traferro}} = \\ &= \frac{1}{2} B_E H_E \cdot V_E = \text{energia nel traferro} \end{aligned}$$

ossia

$F_x \propto$ energia nel traferro.

MATERIALI MAGNETICI NON LINEARI

Consideriamo una situazione in cui il materiale magnetico è non-lineare, cioè $B(H)$ non è rettilinea, ma presenta una isteresi trascurabile. In questo caso l'energia del campo magnetico si definisce da:

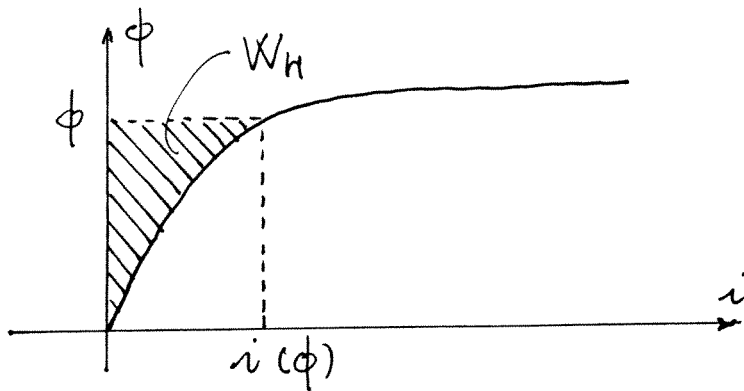
$$p = v i = i \frac{d\phi}{dt} = \frac{dW_H}{dt}$$

da cui:

$$dW_H = i d\phi$$

$$W_H = \int_0^\phi i(\phi') d\phi'$$

Pertanto l'energia è sempre una funzione dello stato (stato barico del sistema (cioè della variabile di stato ϕ o i)) indipendentemente da come si arriva allo stato stesso. Graficamente:



Si ha poi:

$$p_{mecc} = v i - \frac{dW_H}{dt} = i \frac{d\phi}{dt} - \frac{dW_H}{dt}$$

ma:

$$\frac{dW_H}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^\phi i(\phi', t) d\phi' = \int_0^\phi \frac{\partial}{\partial t} i(\phi', t) d\phi' + i \frac{d\phi}{dt}$$

la caratteristica
 $i(\phi)$ dipende da t (parli in moto)

(Ricordare dalla Analisi matematica:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^b f(x,t) dx &= \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) dx + f(b,t) \frac{db}{dt} + f(a,t) \frac{da}{dt} \end{aligned}$$

da cui:

$$p_{mecc} = i \frac{d\phi}{dt} - \int_0^\phi \frac{\partial i(\phi',t)}{\partial t} d\phi' = i \frac{d\phi}{dt}$$

ma se la caratteristica dipende da t attraverso uno spostamento x :

$$\frac{\partial i(\phi',t)}{\partial t} = \frac{\partial i(\phi',x)}{\partial x} \cdot v_x$$

e, siccome ϕ non dipende esplicitamente da x :

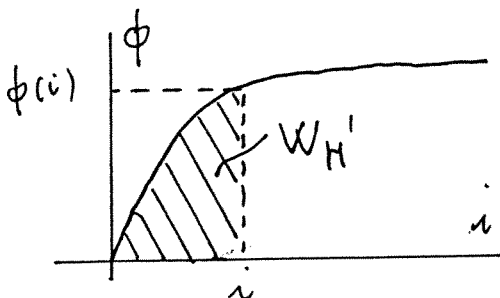
$$\begin{aligned} - \int_0^\phi \frac{\partial i(\phi',t)}{\partial t} d\phi' &= -v_x \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\phi i(\phi',x) dx = \\ &= -v_x \frac{\partial W_H(\phi,x)}{\partial x} \end{aligned}$$

ossia:

$$F_x = - \frac{\partial W_H(\phi,x)}{\partial x}$$

Se si definisce una nuova funzione di stato:

$$\text{coenergia} = vi - W_H \triangleq W'_H = \int_0^i \phi(i) di$$



si può scrivere:

$$F_x = \frac{\partial W'_H(i,x)}{\partial x}$$

Nel caso lineare si ha:

$$W_H = \int_0^\phi i(\phi) d\phi = \int_0^\phi \frac{\phi}{L} d\phi = \frac{1}{2} \frac{1}{L} \phi^2$$

$$W_H' = \int_0^i \phi(i) di = \int_0^i L i di = \frac{1}{2} L i^2$$

ovvia $W_H = W_H' = \frac{1}{2} \phi i$. Nel caso non lineare, può essere comodo utilizzare l'energia o la coenergia a seconda che venga imposta la corrente o il flusso.

ESEMPIO Nel caso visto in precedenza (relè con ancora mobile) si aveva:

$$L(x) = \frac{\mu_0 S}{2x} N^2$$

da cui:

$$W_H = \frac{1}{2} \frac{2x}{\mu_0 S} \cdot N^2 \cdot \phi^2$$

$$W_H' = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 S}{2x} \cdot N^2 \cdot i^2$$

quindi:

$$F_x = - \frac{\partial W_H}{\partial x} = - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\mu_0 S} \cdot \frac{1}{N^2} \phi^2 = - \frac{N^2}{\mu_0 S} \cdot \frac{(\mu_0 S)^2}{(2x)^2} i^2 \frac{1}{N^2}$$

$$F_x = \frac{\partial W_H'}{\partial x} = - \frac{1}{4} \frac{\mu_0 S}{x^2} N^2 i^2$$

cioè in entrambi i casi:

$$F_x = - \frac{\partial W_H}{\partial x} = - \frac{\mu_0 S N^2}{4x^2} i^2 = \frac{\partial W_H'}{\partial x}$$

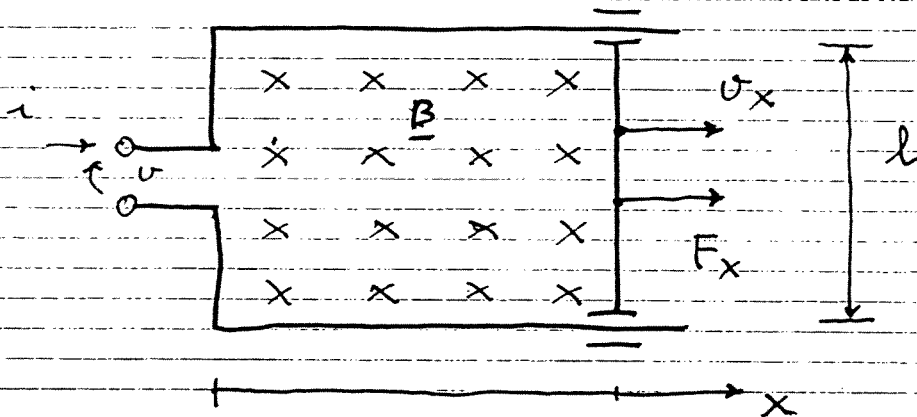
come ovvio. Quindi il calcolo delle forze attraverso energia e coenergia deve portare allo stesso risultato.

GENERATORI E MOTORI IN CORRENTE CONTINUA

Come prototipo semplice di macchina in corrente continua si analizzerà il cosiddetto motore lineare (macchina lineare). Per quanto non facilmente realizzabile in pratica, la macchina lineare è interessante perché di analisi semplice ed in grado di mettere in evidenza alcune proprietà fondamentali delle macchine elettriche, quali la reversibilità e la caratteristica forza-velocità (coppia-velocità per una macchina rotante).

LA MACCHINA LINEARE

Si consideri una spira dotata di un lato mobile di lunghezza l , immersa in un campo B diretto verso il basso, ortogonalmente al piano della pagina:



Qualitativamente:

- 1) una forza applicata alla asta mobile produce il moto dell'asta e quindi una variazione del flusso concatenato con la spira. La variazione di flusso si manifesta come una forza elettromotiva ai morsetti elettrici della spira stessa.
- 2) una corrente iniettata nella spira produce una forza sul lato mobile, che si sposta.

Nel primo caso la macchina funziona da generatore, nel secondo caso da motore. Per l'analisi, consideriamo un caso ideale in cui la spira presenta una resistenza elettrica trascurabile e l'asta meccanica una resistenza meccanica trascurabile. Compriamo l'analisi in due parti:

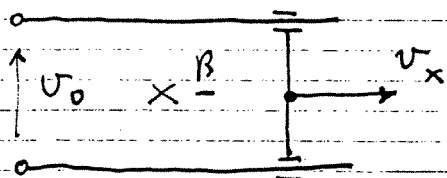
1) ANALISI A VUOTO. Supponiamo che la spira sia (elettricamente) a vuoto e che l'asta mobile si sposti con velocità v_x . Allora la tensione a vuoto v_0 ai capi della spira sarà:

$$v_0 = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (-B \times l) = Bl \frac{dx}{dt}$$

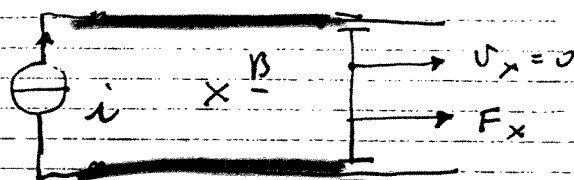
$$v_0 = Blv_x$$

poiché il flusso concatenato con la spira quando il lato mobile è in x vale in valore assoluto $B \cdot S = B \cdot x \cdot l$ ed ha un segno - a causa dell'orientamento della spira rispetto alla direzione del campo B .

2) ANALISI PER $v_x = 0$. Supponiamo ora che la velocità del lato mobile sia nulla, e che sulla spira venga iniettata una corrente i . Allora nel lato mobile scorre una corrente i e sul lato mobile agisce una forza F_x .



Analisi a vuoto



Analisi a $v_x = 0$

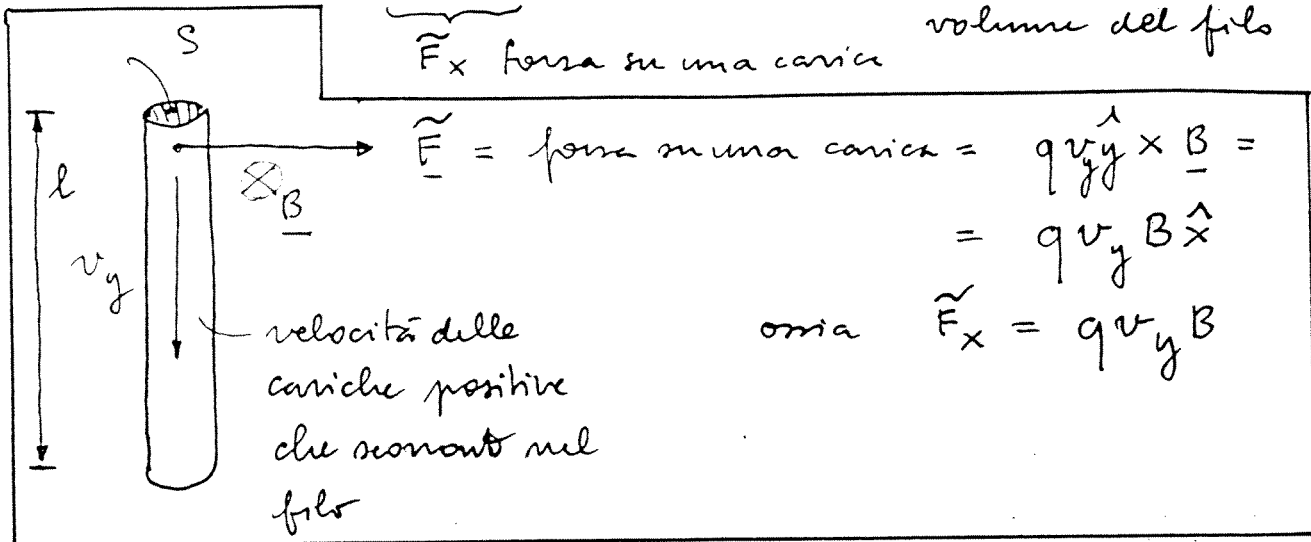
dato da $F_x = Bli$. Infatti:

cariche per unità di volume

$$F_x = q v_y B \cdot n \cdot S l$$

\tilde{F}_x forza su una carica

volumi del filo



Si ha allora:

$$F_x = q n v_y \cdot B \cdot S l$$

$$\rho v_y \quad \rho \frac{l S}{l} \cdot B l$$

J densità di corrente nel lato mobile

$$= J \cdot S \cdot B \cdot l = i B l$$

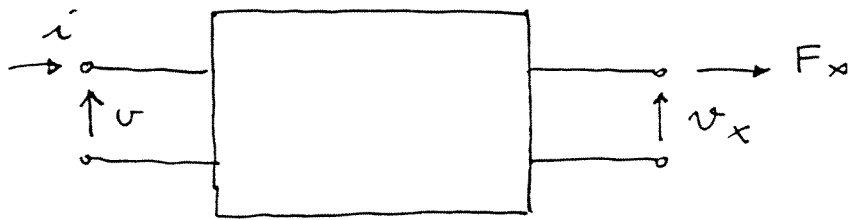
ossia:

$$F_x = B l i$$

Supponiamo ora che la struttura sia LINEARE in qualsiasi condizione di funzionamento. Questa è una approssimazione per che in realtà B è funzione di i (ossia la corrente che

circola nella spira induce un campo di induzione magnetica che modifica quello applicato dall'esterno)

Dalla ipotesi di linearità si ottiene che la struttura a due porte elettro-meccanica:



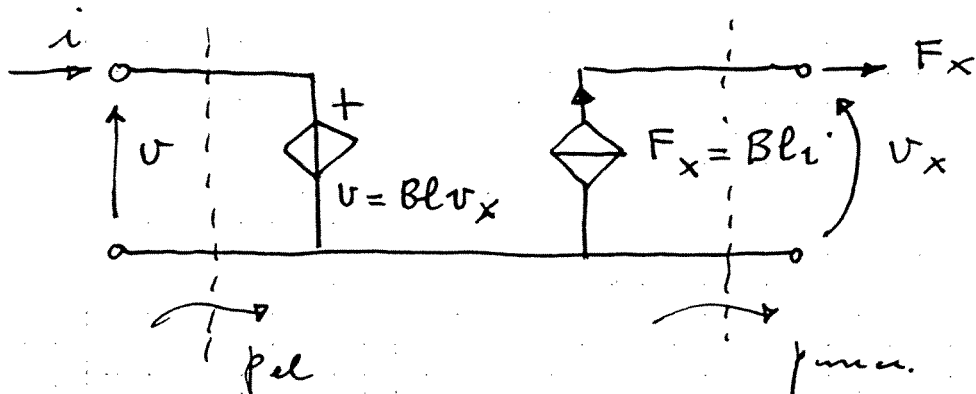
è caratterizzata dalle espressioni:

$$* \begin{cases} v = Bl v_x \\ F_x = Bl i \end{cases} \quad \begin{matrix} v_1 = d v_2 \\ I_2 = d I_1 \end{matrix}$$

Si noti che v non è dipendente da i perché si è assunta trascurabile la resistenza elettrica della spira R . Similmente si è trascurata la resistenza meccanica della spira R_m (forse d'altrio). In questi casi le equazioni sarebbero state:

$$\begin{cases} v = R i + Bl v_x \\ F_x = Bl i - R_m v_x \end{cases}$$

Tomando al caso ideale, le equazioni * hanno una rappresentazione circuitale:



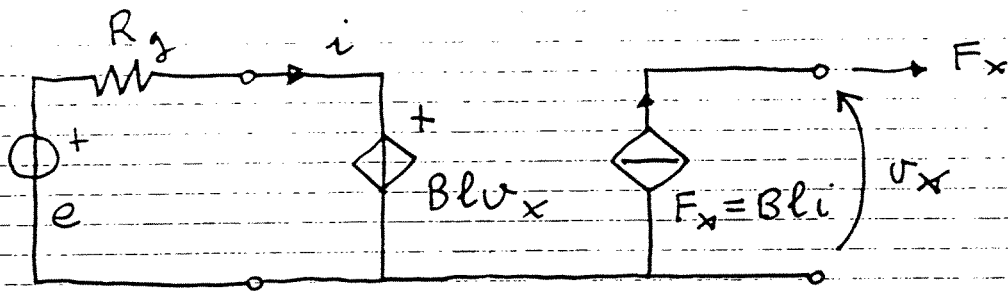
La struttura elettromeccanica ottenuta è PRIVA DI PERDITE:

$$p_{el} = v i = Bl v_x i = Bl i v_x = F_x v_x = p_{mecc.}$$

Nel funzionamento da motore $p_{mecc} > 0$; nel funzionamento da generatore $p_{mecc} < 0$.

MOTORE LINEARE

Colleghiamo alla porta elettrica della macchina un generatore lineare e analizziamo la caratteristica meccanica risultante alla porta 2. Si ha:



Si ha allora: $e = R_g i + Blv_x$

da cui:

$$v_x = \frac{e - R_g i}{Bl}$$

ma, alla porta meccanica:

$$i = F_x / Bl$$

da cui:

$$v_x = \frac{e}{Bl} - R_g \frac{F_x}{(Bl)^2}$$

o sia:

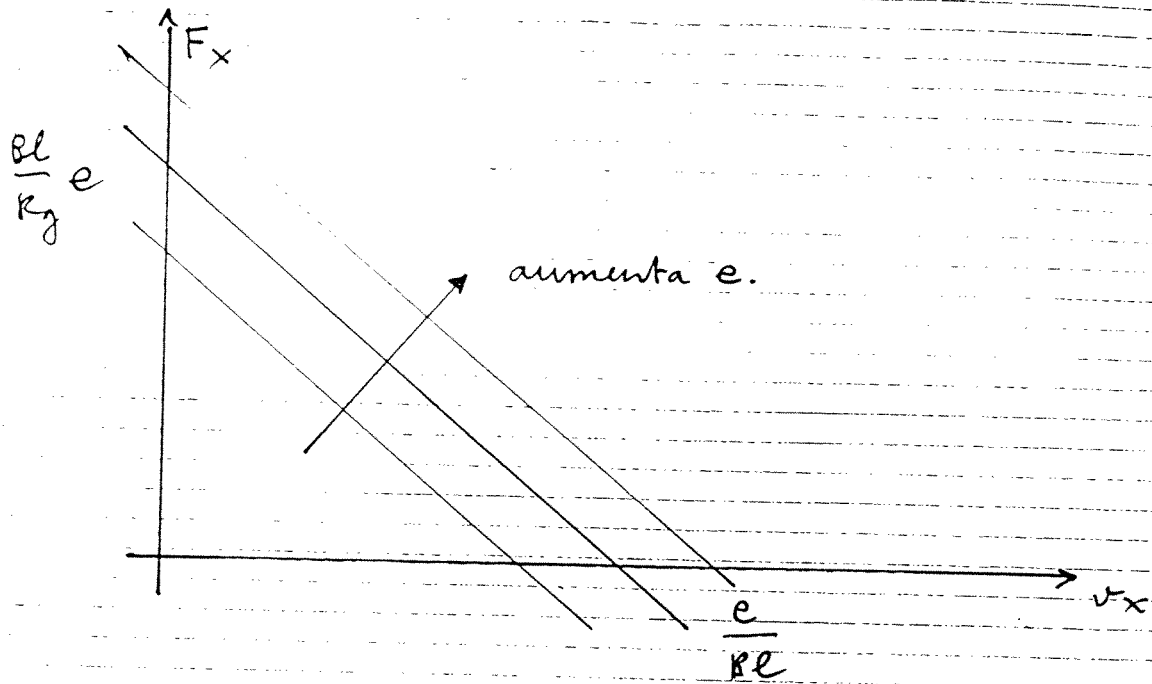
$$F_x = \frac{Bl}{R_g} e - \frac{(Bl)^2}{R_g} v_x$$

Questa è la caratteristica meccanica forza-velocità del motore; definendo allora

$$F_x (v_x = 0) \equiv \text{FORZA DI SPUNTO} = \frac{Bl}{R_g} e$$

$$v_x (F_x = 0) \equiv \text{VELOCITÀ DI FUGA} = e / Bl$$

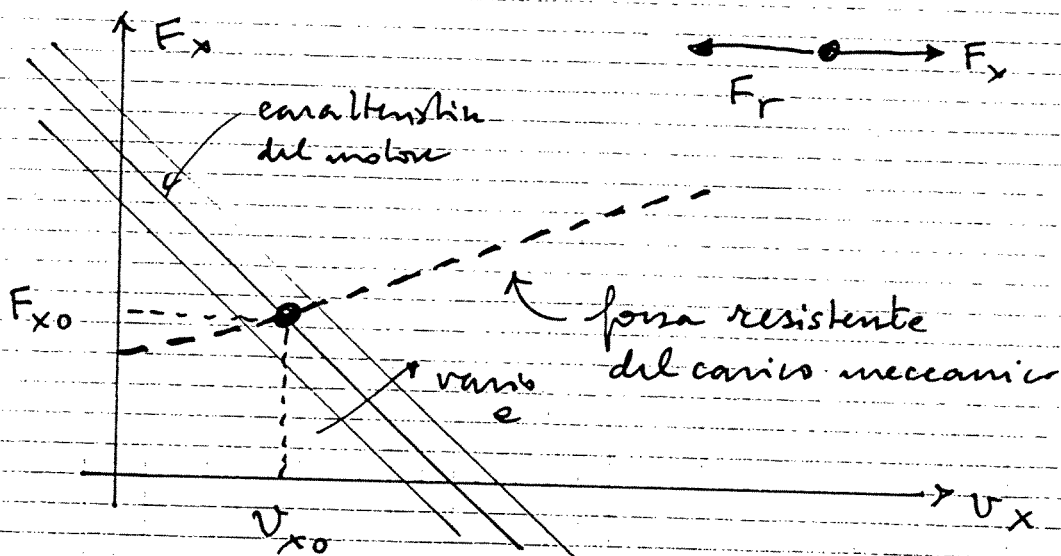
la caratteristica è:



Il punto di lavoro del sistema si ottiene intersecando la caratteristica meccanica del motore con la caratteristica del carico, in modo che:

$$F_x(v_x) = F_r(v_x)$$

motore forza resistente del carico



Si noti che, al motore lineare si regola facilmente la velocità: basta cambiare e per aumentare o diminuire v_x .

GENERATORE LINEARE

Supponiamo ora che la porta meccanica del generatore sia collegata ad un MOTORE PRIMO avente caratteristiche meccaniche:

→ res. meccanica motore

$$F_{xm} = F_{xm\phi} - R_m v_x$$

In condizioni di equilibrio la forza del motore primo e la forza F_x applicata sull'asta hanno risultante NULLA, pertanto:

$$F_x + F_{xm} = 0$$

da cui:

$$Bl i + (F_{xm\phi} - R_m v_x) = 0$$

ovvia:

$$i = \frac{R_m}{Bl} v_x - \frac{F_{xm\phi}}{Bl}$$

da cui:

$$v_x = \frac{Bl}{R_m} i + \frac{F_{xm\phi}}{R_m}$$

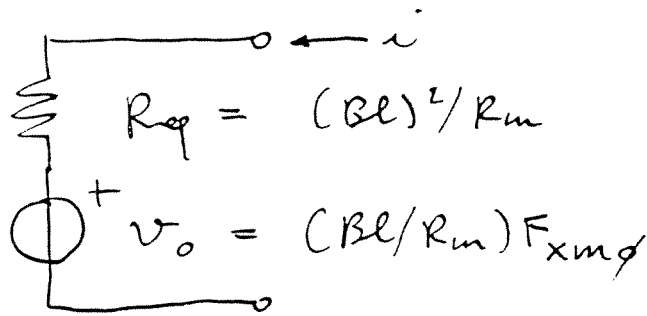
e:

$$\begin{aligned} v = Bl v_x &= \frac{(Bl)^2}{R_m} i + \frac{Bl}{R_m} F_{xm\phi} = \\ &= R_{eq} i + v_0 \end{aligned}$$

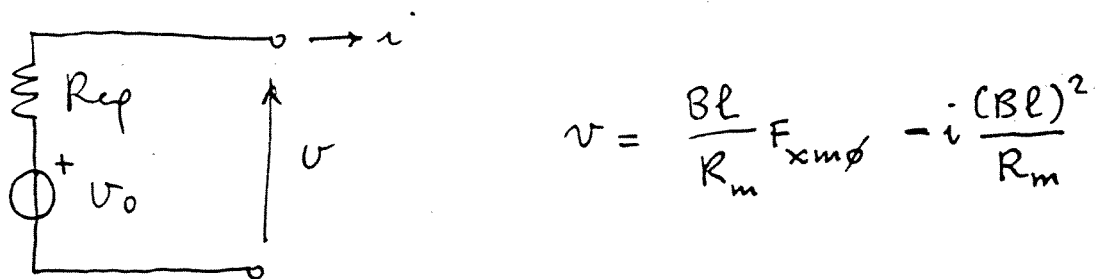
dove:

$$\begin{cases} R_{eq} = \frac{(Bl)^2}{R_m} \\ v_0 = \frac{Bl}{R_m} F_{xm\phi} \end{cases}$$

oma ai morsetti elettrici il sistema si comporta come un generatore lineare e reale con:



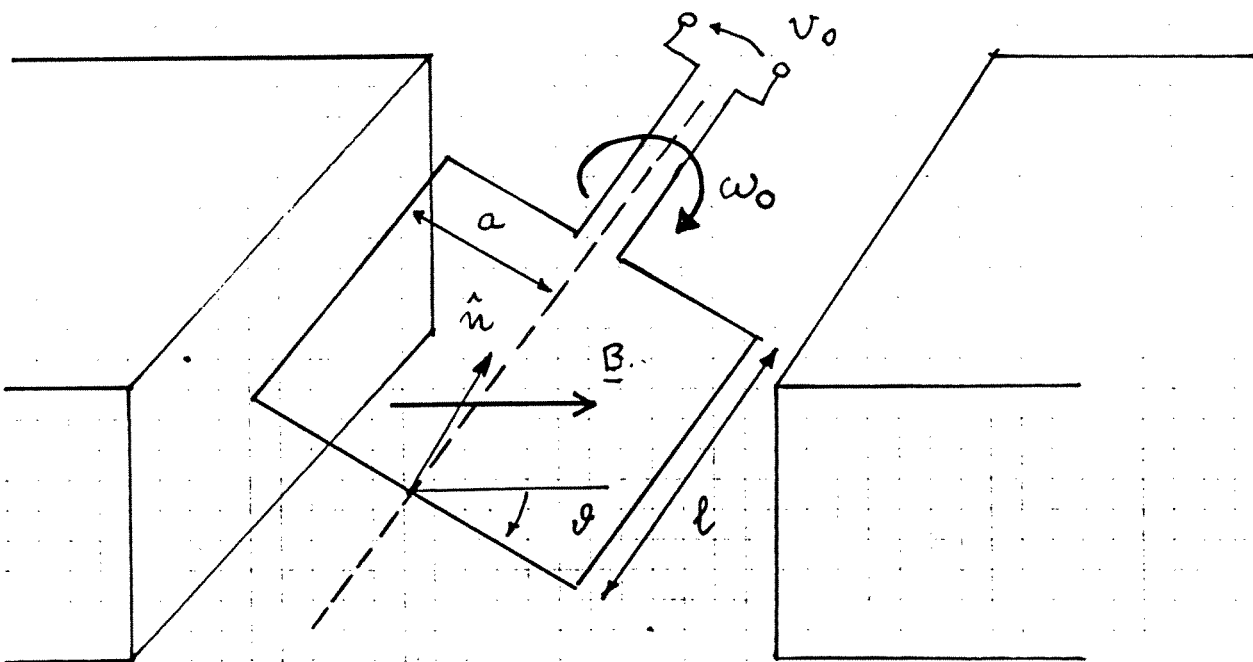
Assumendo la convenzione dei generatori si ottiene:



MACCHINE ROTANTI IN CONTINUA

La generazione di forze elettromotrici costanti attraverso macchine rotanti è realizzata in modo indiretto

A) generando una f.e.m. sinusoidale; B) raddrizzandola.



Consideriamo una spira in rotazione con velocità angolare ω_0 in un campo \underline{B} costante generato da un magnete permanente. La forza elettromotrice v_0 può calcolarsi come:

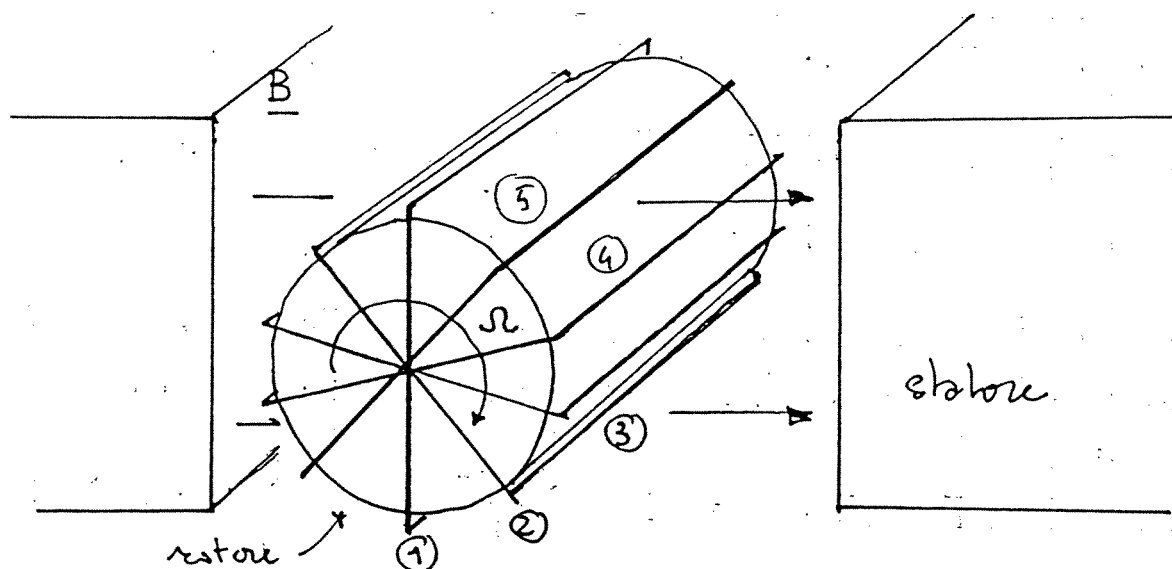
$$v_0 = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (B \cdot 2a \cdot l \cdot \sin\theta)$$

ma, essendo $\theta = \omega_0 t$:

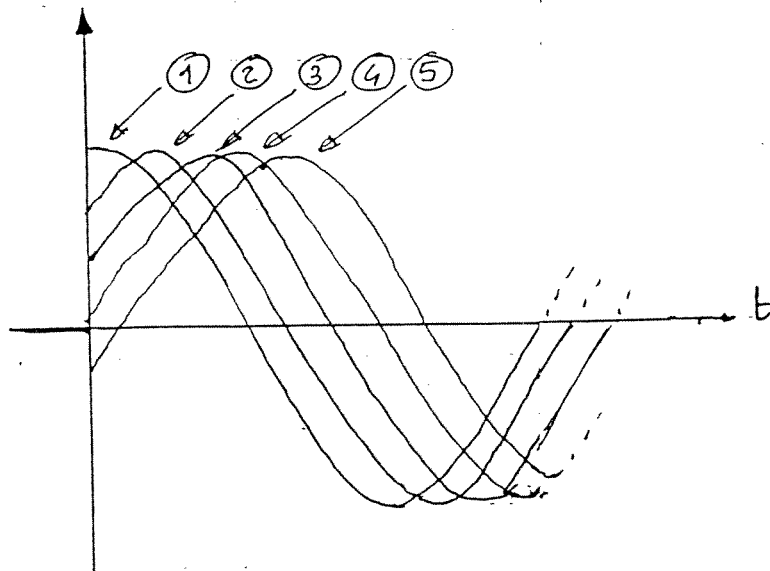
$$v_0 = - \frac{d}{dt} (\underbrace{2alB}_{\phi_0} \sin \omega_0 t) =$$

$$= - \phi_0 \omega_0 \cos \omega_0 t$$

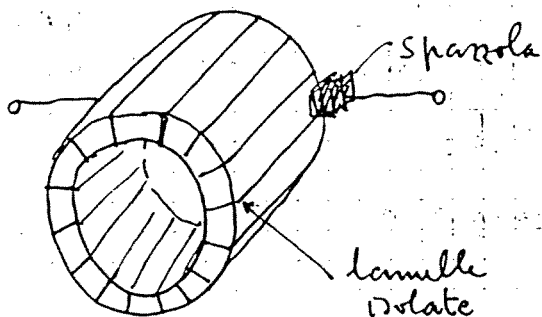
Si ha quindi una f.e.m. SINUSOIDALE di pulsazione pari alla velocità di rotazione della spira. La f.e.m. sinusoidale può essere raddrizzata attraverso un dispositivo meccanico detto COLLETTORE. Supponiamo infatti di considerare un insieme di avvolgimenti immersi in un campo magnetico fisso:



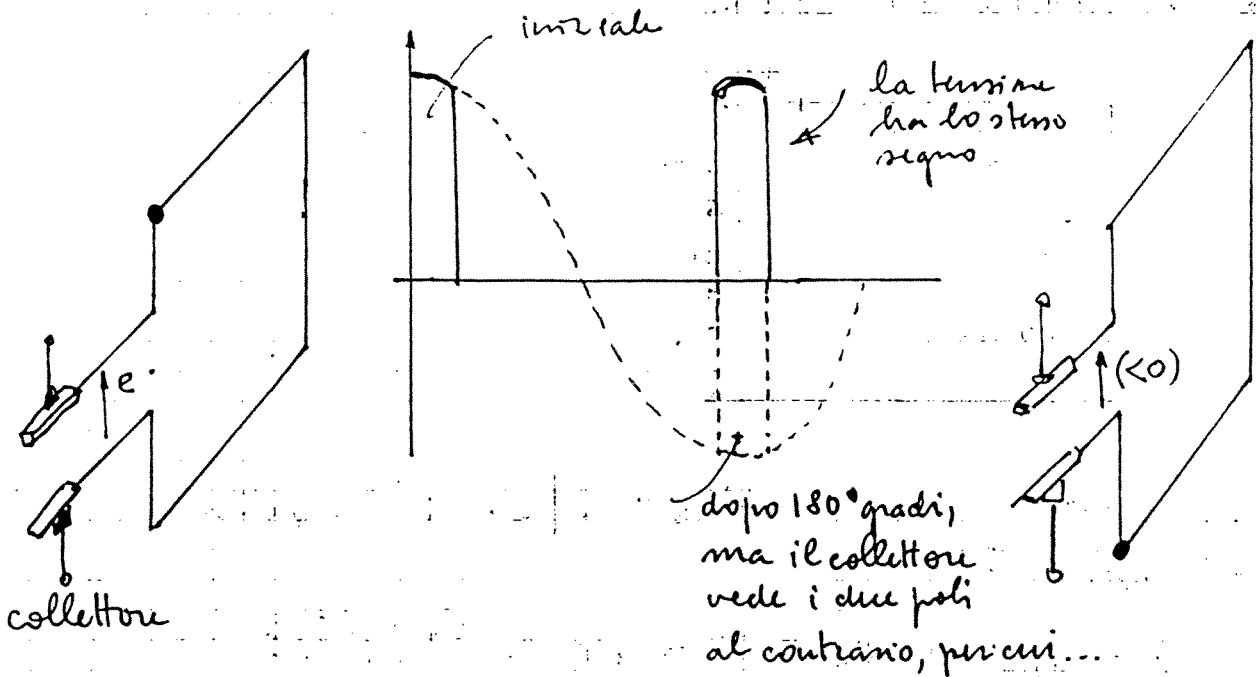
Ciascun avvolgimento fornisce una f.e.m. sinusoidale di frequenza Ω sfasato opportunamente. Se io prelevo all'esterno queste f.e.m. in



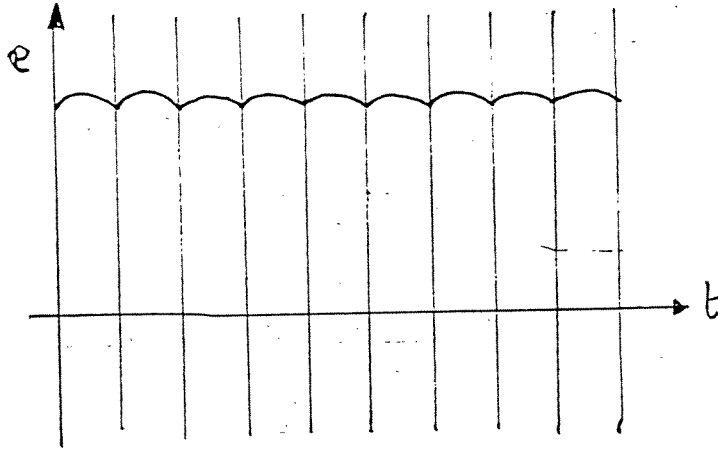
modo da raddrizzarle, cioè mediante un collettore a lamelle



io prendo solo una delle tensioni per volta, ad es. quella che ha valore massimo :



Mettendo insieme i vari avvolgimenti si ha, se il collettore ha un numero di lamelle elevato (e quindi se vi sono parecchi avvolgimenti) una fem praticamente costante:



In definitiva si può scrivere:

$$e = k \phi_0 \omega_0$$

dove k è una costante dipendente dalla macchina, e ϕ_0 rappresenta il flusso massimo concatenato con una spira. Nel funzionamento come motore si deve avere:

$$P_{el} = v i = e \omega_0 = \tau \omega_0$$

da cui:

$$e = \frac{v i}{\omega_0} = \frac{k \phi_0 \omega_0 i}{\omega_0}$$

ossia:

$$e = k \phi_0 i$$

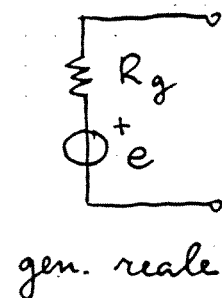
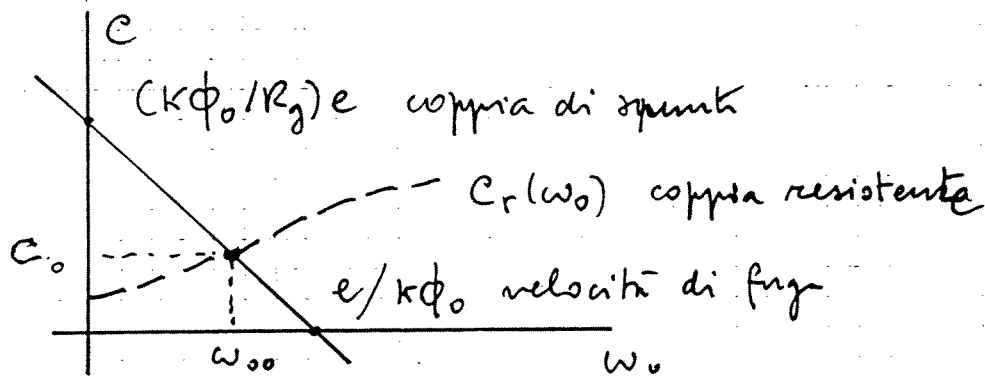
In definitiva si ottiene un risultato simile a quello del motore lineare, con le sostituzioni:

$$\begin{aligned} (Bl) &\longleftrightarrow (k\phi_0) \\ F_x &\longleftrightarrow C \\ v_x &\longleftrightarrow \omega_0 \end{aligned}$$

In particolare la caratteristica meccanica del motore alimentato da un generatore di tensione reale \bar{e} , per analogia con il motore lineare:

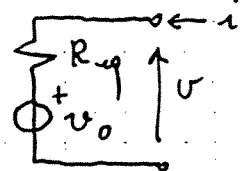
$$C = \frac{k\phi_0}{R_g} e - \frac{(k\phi_0)^2}{R_g} \omega_0$$

Anche qui il punto di lavoro \bar{e} dato dalla uguaglianza della coppia motrice C con la coppia resistente $C_r(\omega_0)$:



Nel funzionamento da generatore, connesso ad un motore privo di coppia a vuoto $C_{m\phi}$ e resistenza meccanica interna R_m , si ha:

$$v = \frac{k\phi_0}{R_m} C_{m\phi} - \frac{(k\phi_0)^2}{R_m} i$$



Come il motore lineare, anche il motore rotante in continua permette una facile regolazione di velocità modificando la tensione di alimentazione.