ELETTROTECNICA

FONDAMENTI DI CONVERSIONE ELETTROMECCANICA

1. RICHIAMI SUL CAMPO ELETTROMAGNETICO

Appunti dalle lezioni di Elettrotecnica del
prof. ***Giovanni Ghione*** *al Politecnico di Milano*

CAMPI ELETTRICI, CAMPI DI CORRENTE, CAMPI MAGNETICI

DEFINIZIONI

Si dice campo scalare uno scalare a funzione del punto ossia del vettore posizione $\underline{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$: $a = a(\underline{r})$.

Si dice campo vettoriale un vettore $\underline{A}$ funzione del punto ossia $\underline{A} = \underline{A}(\underline{r})$.

Dato un vettore $\underline{A}$ si dicono componenti cartesiane del vettore le componenti di $\underline{A}$ secondo le direzioni $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$:

$$\underline{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$$

Di un vettore si possono anche dare le componenti secondo altri sistemi di riferimento; si hanno così le componenti cilindriche:

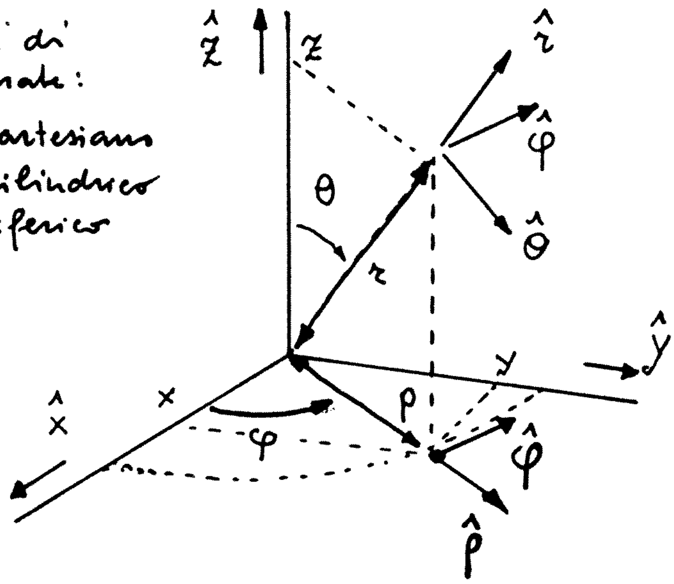
$$\underline{A} = A_\rho \hat{\rho} + A_\varphi \hat{\varphi} + A_z \hat{z}$$

e le componenti sferiche:

$$\underline{A} = A_r \hat{r} + A_\varphi \hat{\varphi} + A_\theta \hat{\theta}$$

Dato un vettore $\underline{A}$ si denota con $|\underline{A}|$ il suo modulo e con $\hat{A} = \underline{A} / |\underline{A}|$ il versore (vettore unitario) associato alla direzione di $\underline{A}$.

Sistemi di coordinate:
(xyz) cartesiano
(ρφz) cilindrico
(rφθ) sferico



FLUSSO DI $\underline{A}$

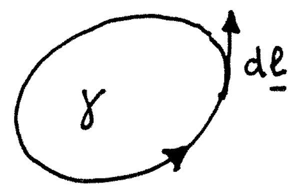
Data una superficie Σ (aperta o chiusa) cui è associato un versore normale $\hat{n}$ orientato verso l'esterno si dice FLUSSO del vettore $\underline{A}$ sulla superficie Σ l'integrale su Σ della componente normale di $\underline{A}$:

$$\text{flusso di } \underline{A} \text{ su } \Sigma \triangleq \int_{\Sigma} \underline{A} \circ \hat{n} \, d\sigma$$

CIRCUITAZIONE DI $\underline{A}$

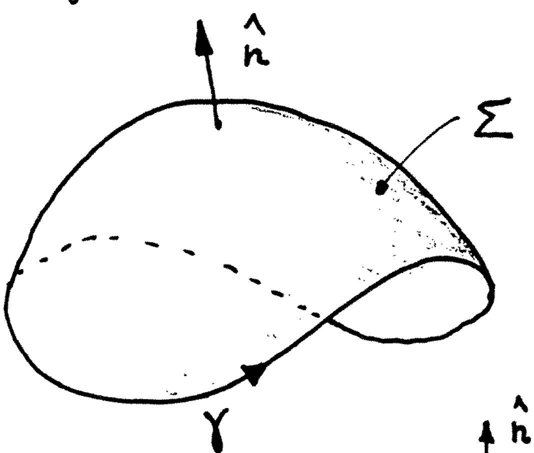
Data una curva chiusa orientata γ (sulla quale cioè è individuato un verso di percorrenza) si dice CIRCUITAZIONE di $\underline{A}$ su γ l'integrale su γ della componente di $\underline{A}$ lungo γ:

$$\text{circuitazione di } \underline{A} \text{ lungo } \gamma \triangleq \oint_{\gamma} \underline{A} \cdot d\underline{l}$$



FLUSSO E CIRCUITAZIONE

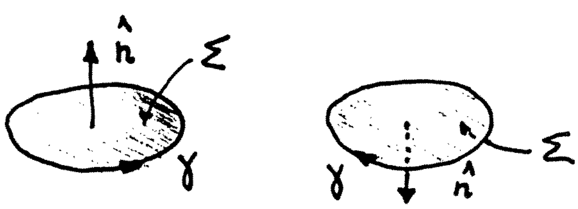
Spesso è necessario associare alla circuitazione di un vettore su γ il flusso di un altro vettore sulla superficie Σ di cui γ funge da supporto. In questo caso si associano come in figura la direzione della normale a Σ e il verso di percorrenza di γ.



$\hat{n} \to$ verso l'alto

$\gamma \to$ percorsa in verso antiorario

ossia anche:



CAMPI ELETTRICI

E' possibile introdurre le grandezze fisiche associate ai campi elettrici in modo tale da porre ciascuna grandezza in una relazione di causa ed effetto con la grandezza seguente. In generale i campi e le altre grandezze introdotte saranno costanti o debolmente variabili nel tempo. Si userà la stessa notazione per grandezze costanti e funzioni di t; la variazione nel tempo verrà indicata in modo esplicito ponendo ad es. $\underline{A}(t)$ invece di $\underline{A}$.

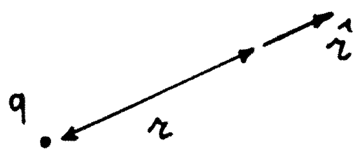
CARICA ELETTRICA q o Q $[C]$ (C, coulomb; $[\,]$ indica l'unità di misura). E' una proprietà della materia, che può assumere segno positivo o negativo (⊕ o ⊖). La carica elementare dell'elettrone vale $e = 1.6 \times 10^{-19}\ C$, con segno negativo.

DENSITA' DI CARICA ρ $[C/m^3]$ indica l'intensità di una carica distribuita nello spazio. La carica racchiusa in un volume V è:

$$Q = \int_V \rho(\underline{r})\, dV$$

CAMPO DI INDUZIONE ELETTRICA o CAMPO $\underline{D}$ $[C/m^2]$ è indotto o causato dalla presenza, nello spazio, di carica elettrica. Ad esempio il campo $\underline{D}$ associato ad una carica puntiforme di intensità q è dato da:

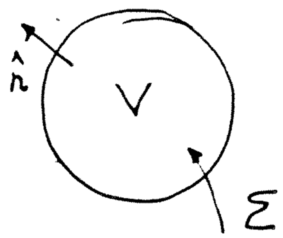
$$\underline{D} = \frac{\hat{r}}{4\pi r^2}\, q$$



(Legge di Coulomb); ossia il campo $\underline{D}$ causato da una carica puntiforme è radiale, varia come l'inverso del quadrato della distanza ed è uscente dalla carica se questa è positiva, entrante se questa è negativa.

LEGGE DI GAUSS

Il flusso di $\underline{D}$ attraverso una superficie chiusa è pari alla carica totale presente all'interno di essa:



$$\int_\Sigma \underline{D}\cdot\hat{n}\,d\sigma = q = \int_V \rho\,dV$$

Ad esempio, per una carica puntiforme:

$$\int_\Sigma \underline{D}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_\Sigma \frac{\hat{r}}{4\pi r^2}\,q\cdot\hat{r}\,d\sigma = \frac{q}{4\pi r^2}\int_\Sigma d\sigma =$$

superficie sferica di raggio r centrata nella carica q

$$= \frac{q}{4\pi r^2}\cdot 4\pi r^2 = q$$

<u>CAMPO ELETTRICO</u> $\underline{E}$ [V/m] (volt al metro). In un mezzo materiale o nel vuoto il campo $\underline{D}$ causa un campo elettrico $\underline{E}$ legato a $\underline{D}$ da una relazione costitutiva che è lineare nella maggior parte dei casi; in un mezzo lineare e isotropo si può scrivere:

$$\underline{D} = \epsilon\,\underline{E}$$

ove ϵ [F/m] (farad al metro) è la PERMETTIVITÀ DIELETTRICA del mezzo. Spesso si pone $\epsilon = \epsilon_r\epsilon_0$ ove:

ϵ_r = permettività relativa

ϵ_0 = permettività del vuoto, $\epsilon_0 = 8.86\times 10^{-12}$ F/m

Per la maggior parte delle sostanze ϵ_r è compreso fra 1 e 100.

<u>FORZA ELETTRICA</u> $\underline{F}$ [N] (newton). Una carica immersa in un campo elettrico subisce una forza $\underline{F} = q\,\underline{E}$.

Ad es. se il campo è causato da una carica puntiforme Q si ha:

$$\underline{E} = \frac{1}{4\pi r^2 \epsilon} \, qQ \, \hat{r}$$

cioè la forza agente fra due cariche puntiformi varia come l'inverso del quadrato della distanza fra le due cariche, agisce sulla congiungente delle due cariche ed è repulsiva per cariche di uguale segno, attrattiva per cariche di segno opposto.

<u>POTENZIALE ELETTRICO v</u> [V]. Il potenziale associato ad un campo elettrico è definito come:

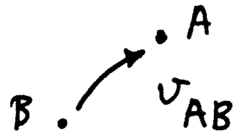
$$v(\underline{r}) = \int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}} \underline{E} \cdot d\underline{\ell}$$

si noti che $v(\underline{r}_0) = 0$ ossia $\underline{r}_0$ è preso come punto di riferimento del potenziale. Nel caso in cui $v(\underline{r})$ non dipende dal percorso scelto fra $\underline{r}_0$ e $\underline{r}$ si dice che il campo $\underline{E}$ è conservativo, ossia anche che:

$$\oint_\gamma \underline{E} \cdot d\underline{\ell} = 0$$

per qualsiasi curva chiusa γ. Questo è vero esattamente per un campo statico, con ottima approssimazione per un campo debolmente variabile. Si dice DIFFERENZA DI POTENZIALE o TENSIONE fra due punti A e B:

$$v_{AB} = \int_A^B \underline{E} \cdot d\underline{\ell}$$



(notare che la freccia punta sul primo estremo di integrazione ad indicare la convenzione di segno). L'energia potenziale di una carica q immersa in un campo è $w = qv$.

CARICA E POTENZIALE

Un insieme di cariche disposte nello spazio e aventi intensità Q è in grado di indurre un campo $\underline{D}$ e di conseguenza un campo $\underline{E}$. Pertanto, a causa della presenza della carica, si origina fra due punti A e B dello spazio una differenza di potenziale v_{AB} che è proporzionale a Q. Infatti, se la disposizione geometrica del sistema di cariche è stabilita e resta fissa, $\underline{E}$ è proporzionale a $\underline{D}$ che è proporzionale (cfr. la legge di Coulomb) a Q. Ma, poichè v_{AB} è proporzionale ad $\underline{E}$, si ha in definitiva:

$$v \propto Q$$

ossia:

$$v = \frac{1}{C} Q$$

oppure:

$$Q = C v$$

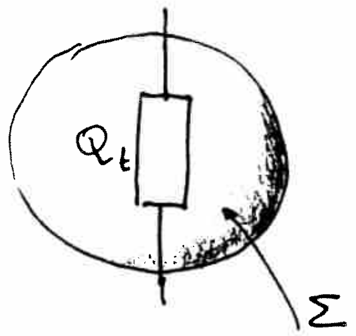
ove il fattore di proporzionalità si dice CAPACITA' associata al sistema di cariche e si misura in farad [F] o nei suoi sottomultipli mF, μF, nF, pF. La capacità di un sistema di cariche dipende dalla geometria del sistema stesso, ossia da come sono disposte le cariche nello spazio.

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "Q = Cv"'] & \underline{D} \arrow[r] & \underline{E} \arrow[r] & v \end{tikzcd}$$

Schema relazione causale carica - campo - potenziale elettrico.

NEUTRALITA' DI UN SISTEMA CHIUSO

In molti casi pratici un sistema elettrico contenente cariche è quasi-chiuso, ossia il campo elettrico indotto dalle cariche presenti nel sistema stesso è nullo o quasi nullo all'esterno del sistema. Più rigorosamente, esiste una superficie Σ nella quale il sistema (ad es. un bipolo) può essere racchiuso, tale che il campo $\underline{E}$ su Σ è $\sim \emptyset$.



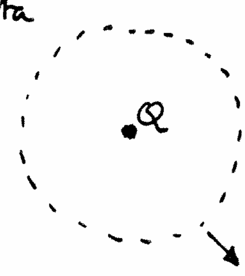
In tali condizioni si ha allora:

$$\int_\Sigma \epsilon \underline{E} \cdot \hat{n}\, d\sigma = Q_t \cong \emptyset$$

ossia la carica totale in Σ è nulla o circa nulla.

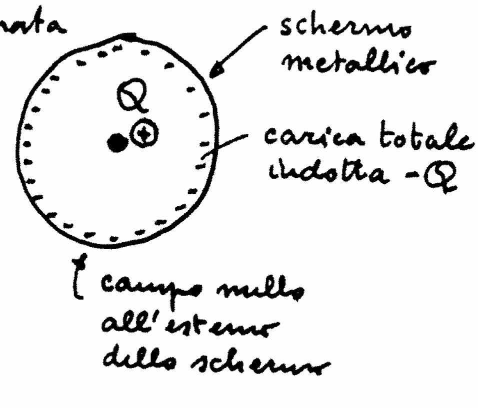
Da un punto di vista fisico l'esistenza pratica di sistemi chiusi o quasi-chiusi è garantita dalla presenza di sostanze, quali i metalli, che in presenza di un campo elettrico reagiscono mediante una carica indotta sulla loro superficie tale da compensare il campo elettrico stesso. E' pertanto sufficiente racchiudere un sistema in una superficie metallica per rendere nullo il campo elettrico all'esterno della superficie stessa; tale annullamento è causato dalla carica indotta sulla superficie interna del metallo, che è tale da produrre la neutralità totale del sistema.

- Carica isolata



$$\underline{E} = \frac{Q\hat{r}}{4\pi\epsilon r^2}$$

- Carica schermata



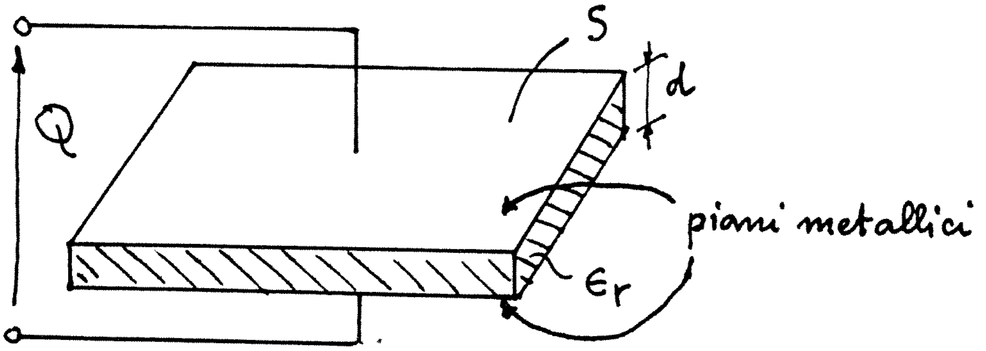
<u>OSSERVAZIONE</u> Perché un sistema sia neutrale è a rigore sufficiente che il campo elettrico da esso generato vada a $\emptyset$ per $r \to \infty$ più velocemente di $1/r^2$. Infatti per $r \to \infty$ applicando il teorema di Gauss si ha:

$$\int_{\Sigma_\infty} \underline{D}\cdot\hat{n}\, d\sigma = \lim_{r\to\infty} \frac{A}{r^N}\cdot 4\pi r^2 = A\, r^{N-2} \to \emptyset \quad \text{per } N>2$$

(A è una costante di proporzionalità). Quindi il campo di un sistema neutro o quasi chiuso non è necessariamente nullo a distanza finita, basta che a distanza sufficientemente grande dal sistema si annulli più rapidamente di $1/r^2$.

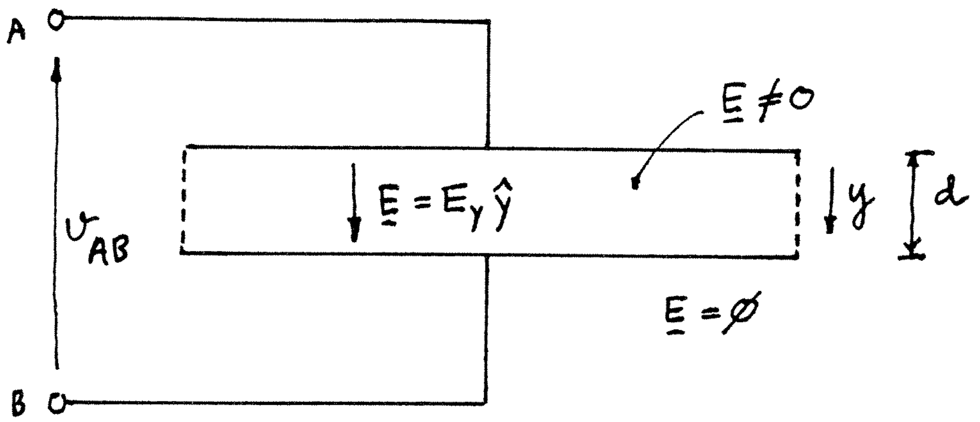
ESEMPIO: CONDENSATORE A FACCE PIANE PARALLELE

Si dice condensatore un bipolo in grado di accumulare una carica Q quando sottoposto a una differenza di potenziale v. Se il condensatore, come accade in pratica, è un sistema quasi-chiuso, la carica accumulata sarà $+Q$ e $-Q$, ovviamente in parti diverse del sistema. Pertanto il condensatore è composto da almeno due parti isolate fra di loro nelle quali vanno ad accumularsi due densità di carica di intensità totale $+Q$ e $-Q$. L'esempio in pratica più importante di condensatore è il condensatore a facce piane parallele, costituito da due piani metallici (detti armature) di superficie S, posti alla distanza d e separati da un dielettrico di permettività relativa ϵ_r.



se la distanza d fra le armature è piccola rispetto alla dimensione longitudinale delle stesse ($\sim\sqrt{S}$) è possibile trascurare l'effetto di bordo, ossia supporre che il campo elettrico sia: nullo all'esterno delle armature, uniforme all'interno delle armature. Si pone quindi:

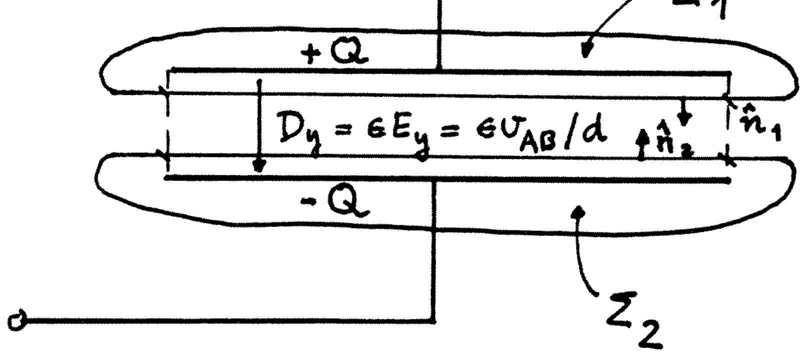
$$\underline{E} = \begin{cases} E_y\hat{y} & \text{fra le armature} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



allora: $$v_{AB} = \int_A^B \underline{E}\cdot d\underline{l} = E_y d$$

da cui: $$E_y = v_{AB}/d$$

Applicando poi la legge di Gauss a due superfici chiuse che racchiudano ciascuna una delle due armature:



$$\int_{\Sigma_1} \underline{D}\cdot\hat{n}_1\, d\sigma = \frac{\epsilon v_{AB}}{d}\cdot S = Q$$

$$\int_{\Sigma_2} \underline{D}\cdot\hat{n}_2\, d\sigma = -\frac{\epsilon v_{AB}}{d} S = -Q$$

L'armatura superiore (a potenziale positivo) porta una carica Q, l'armatura inferiore una carica $-Q$ uguale e contraria. Si ha allora:

$$Q = C v_{AB}$$

dove la capacità C è data da:

$$\boxed{C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d}}$$

<u>ESEMPIO</u> Si consideri un condensatore con $d = 100\,\mu m$, $\epsilon_r = 2$. Quale è la superficie necessaria per ottenere $C = 1\,mF$?
Si ha:

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d} \quad , \quad S = \left(\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{d}\right)^{-1} C = \frac{100 \times 10^{-6}}{2 \times 8.86 \times 10^{-12}} \cdot 10^{-3}$$

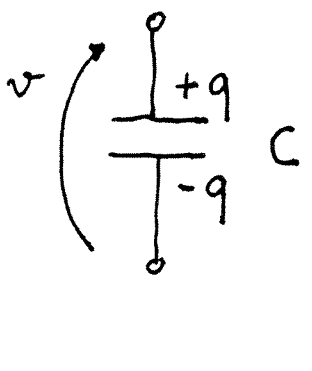
$$= 5643 \ m^2 !$$

Si vede quindi come una capacità da $1\,mF$ sia un valore molto elevato, raggiungibile in pratica solo con componenti particolari in cui d è reso estremamente piccolo.

CONDENSATORE LINEARE

Il condensatore a facce piane parallele è un esempio di condensatore lineare, un bipolo che accumula una carica q proporzionale alla tensione applicata v :

$$q = C v$$

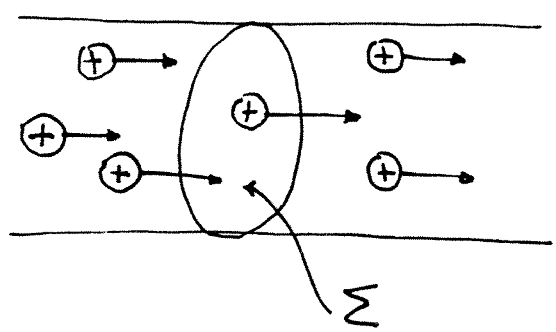


C è detto CAPACITÀ e si misura in F (farad; $1F = 1C/1V$). L'inverso della capacità è detto ELASTANZA del condensatore. Di solito si indica sul componente solo la carica positiva $+q$, omettendo quella negativa $-q$.

CAMPI DI CORRENTE

I mezzi materiali si possono distinguere in dielettrici (o isolanti) e conduttori: negli isolanti non vi sono cariche mobili (ossia in grado di muoversi ad es. sotto l'effetto di una forza elettrostatica); nei conduttori vi sono cariche mobili che si possono spostare sotto l'effetto di un campo elettrico applicato dando così luogo ad una corrente elettrica. Si noti che in un mezzo conduttore (metallo, semiconduttore) la densità di carica netta è nulla perché le cariche mobili (ad es. elettroni) sono compensate in media da altre cariche fisse (ad es. ioni positivi) in modo da dare luogo ad un mezzo complessivamente neutrale. Una corrente elettrica distribuita all'interno di un conduttore è detto <u>campo di corrente</u>. Anche le grandezze relative ai campi di corrente possono porsi in relazione di causa ed effetto secondo lo schema seguente.

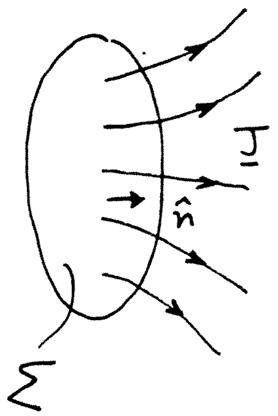
<u>CORRENTE ELETTRICA</u> i [A] rappresenta un flusso di cariche (positive per convenzione) di 1 C/secondo attraverso la superficie Σ:



La corrente elettrica i può essere interpretata come FLUSSO di un opportuno vettore, detto:

<u>DENSITA' DI CORRENTE</u> $\underline{J}$ [A/m²] definisce una corrente per unità di superficie che fluisce in una direzione

$\hat{J} = \underline{J}/|\underline{J}|$. La corrente totale i attraverso una superficie Σ è data da:



$$i = \int_\Sigma \underline{J} \cdot \hat{n}\, d\sigma$$

Se $\underline{J}$ è uniforme ed ortogonale alla superficie Σ di area S si ha semplicemente $i = JS$.

DENSITA' DI CORRENTE, CAMPO ELETTRICO, TENSIONE

In un mezzo conduttore nella quale sia presente una concentrazione di carica libera $\bar{\rho}$ (ad es. in un metallo $\bar{\rho} = qn$, n concentrazione degli elettroni) che si sposta ad una velocità media $\underline{v}$ si ha una densità di corrente (campo di corrente) pari a:

$$\underline{J} = \bar{\rho}\,\underline{v}.$$

Si è detto che le cariche mobili vengono messe in moto da un campo elettrico applicato. Nei conduttori vale la legge di proporzionalità:

$$\underline{v} = \bar{\mu}\,\underline{E}$$

ove $\bar{\mu}$ è detta MOBILITA' delle cariche libere. (Per campi elettrici elevati $\underline{v} \to \underline{v}_s \approx 10^7$ cm/s, ossia la relazione lineare vale solo per campi relativamente bassi, quali si trovano in pratica in componenti elettrici o elettronici). Si ha allora:

$$\underline{J} = \bar{\rho}\,\underline{v} = \bar{\rho}\bar{\mu}\,\underline{E} = \gamma\,\underline{E}$$

ove γ [S/m] è la CONDUCIBILITA' del materiale.
Si ha quindi $\gamma = \bar{\mu}\bar{\rho}$. Si pone poi $\gamma^{-1} = \rho$, resistività, misurata in $\Omega \cdot m$ (il simbolo è lo stesso della densità di carica!). Si scrive quindi:

$$\underline{J} = \gamma \underline{E} \qquad \gamma \text{ CONDUCIBILITA'}$$

$$\underline{E} = \rho \underline{E} \qquad \rho \text{ RESISTIVITA'}$$

Le due relazioni precedenti prendono il nome di "Legge di Ohm microscopica".
Poiché un campo elettrico presuppone l'esistenza di una differenza di potenziale v, è possibile costruire per i campi di corrente una catena di causa ed effetto analoga a quella introdotta per i campi elettrici:

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "v = Ri"'] & \underline{E} \arrow[r] & \underline{J} \arrow[r] & i \end{tikzcd}$$

In una data configurazione una differenza di potenziale v causa il flusso di una corrente i ad essa proporzionale; il fattore di proporzionalità si dice CONDUTTANZA G [S] (siemens: 1S = 1A/1V) e si scrive:

$$i = G v$$

o anche:

$$v = R i$$

ove R è detta RESISTENZA e si misura in Ω (Ohm).

ESEMPIO: RESISTORE A FILO

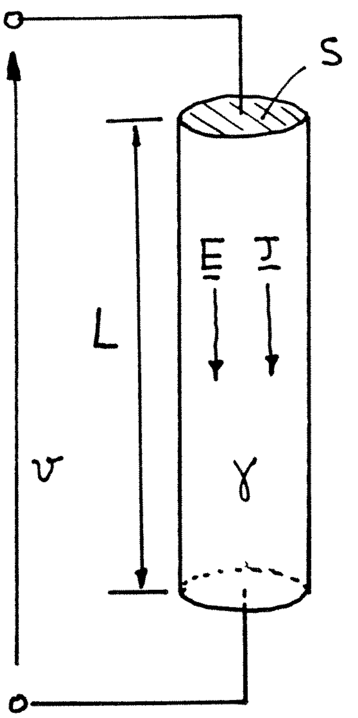
Si consideri un filo di lunghezza L e area S sottoposto ad una differenza di potenziale v. Si supponga che il campo elettrico indotto all'interno del filo dalla differenza di potenziale sia uniforme all'interno del filo e parallelo ad esso. Allora:

$$E \sim v/L$$

da cui:

$$J = \gamma E = \gamma v/L$$

ossia nel filo fluisce una densità di corrente uniforme e parallela all'asse del filo. All'esterno del filo il materiale è isolante ($\gamma = 0$) e quindi $\underline{J} = 0$. Si ha allora:



$$i = \int_{\Sigma} \underline{J} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \frac{\gamma S}{L} v$$

per qualsiasi sezione del filo; ossia:

$$\boxed{G = \frac{\gamma S}{L}}$$

conduttanza del filo, o anche:

$$\boxed{R = \frac{L}{\gamma S} = \frac{\rho L}{S}}$$

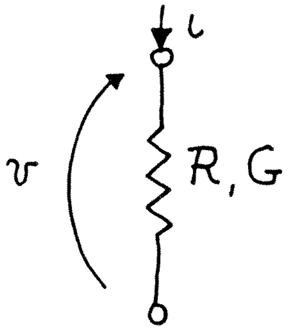
resistenza del filo.

ESEMPIO Con un filo di $1\,mm^2$ di sezione, $\gamma = 10^7\,S/m$ (buon conduttore) si voglia costruire un resistore da $1\,\Omega$. Quale deve essere la lunghezza del filo?

Si ha: $R = L/\gamma S$ da cui: $L = R\gamma S = 1 \times 10^7 \times 10^{-6} =$ $= 10\,m$. Si vede quindi che tratti corti di filo metallico hanno resistenza trascurabile ($\ll 1\,\Omega$), ossia sono dei corticircuiti.

RESISTORE LINEARE

Il resistore a filo è un esempio di resistore lineare, un bipolo che sottoposto a una tensione v conduce una corrente elettrica i proporzionale a v secondo la legge:



$$i = G v$$

ove G è detta **CONDUTTANZA** del resistore, misurata in S (siemens). L'inverso della conduttanza è detto **RESISTENZA** del resistore, ed è misurata in Ω

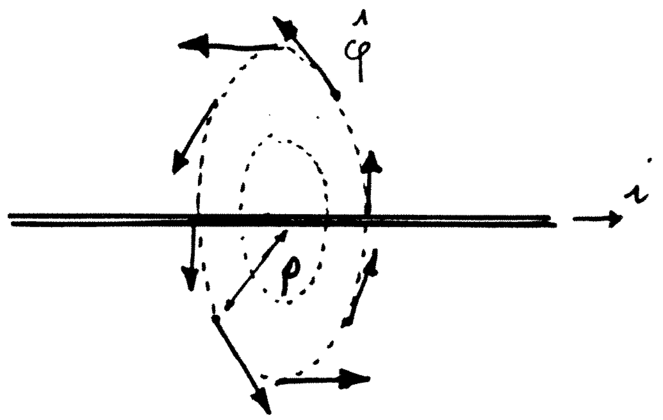
CAMPI MAGNETICI

In modo analogo a quanto fatto per i campi elettrici, è possibile costruire una catena di cause - effetti che, per i campi magnetici, parte dalla corrente elettrica. In presenza di una corrente si origina un

CAMPO MAGNETICO $\underline{H}$ [A/m]. E' indotto da una corrente elettrica; ad esempio una corrente filiforme induce un campo magnetico che è proporzionale a i, varia come l'inverso della distanza da i, ed è diretto lungo circonferenze centrate in i:

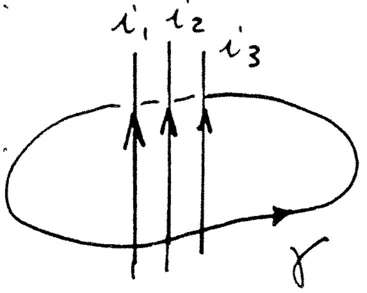
$$\underline{H} = \frac{\hat{\varphi}}{2\pi\rho}\, i$$

(Legge di BIOT-SAVART)



LEGGE DI AMPERE

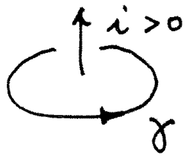
La circuitazione del campo magnetico su di una curva γ è pari alla corrente totale i_{tot} concatenata con la curva γ.



$$\oint_\gamma \underline{H} \cdot d\underline{l} = i_{tot}$$

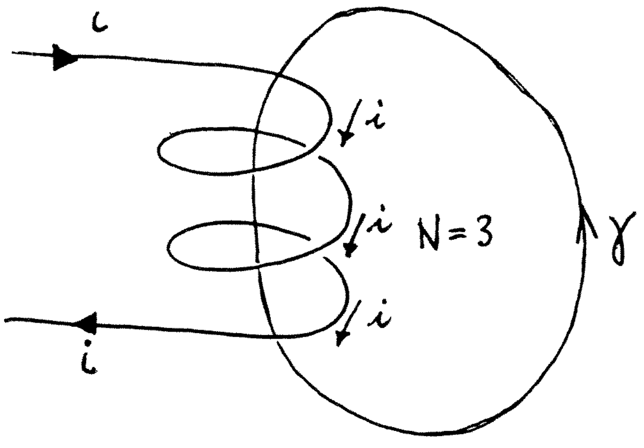
$$i_{tot} = i_1 + i_2 + i_3$$

Il verso di i_{tot} è preso positivo con la convenzione:



orientato antiorario

Spesso $i_{tot} = Ni$ ove N è il numero di spire concatenate, i la corrente di una spira



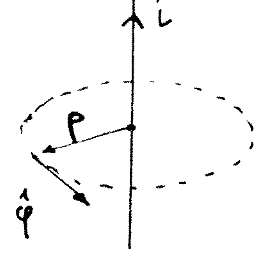
In questo caso la legge di Ampère si scrive:

$$\oint_\gamma \underline{H} \cdot d\underline{l} = Ni$$

ESEMPIO Dato un filo percorso da corrente, supponendo il campo magnetico diretto secondo la direzione circonferenziale e indipendente dall'angolo formato con il filo, si ha: $\underline{H} = H(\rho)\hat{\varphi}$, da cui:

$$\oint_\gamma \underline{H} \cdot d\underline{l} = H(\rho) \cdot 2\pi\rho = i$$

↑ circonf. di raggio ρ centrata nell'intorno del filo



ossia:

$$H(\rho) = \frac{i}{2\pi\rho}$$

che coincide con la legge di Biot-Savart.

INDUZIONE MAGNETICA O DENSITA' DI FLUSSO MAGNETICO $\underline{B}$

[T] o [Wb/m²] (tesla o weber al metro quadrato).

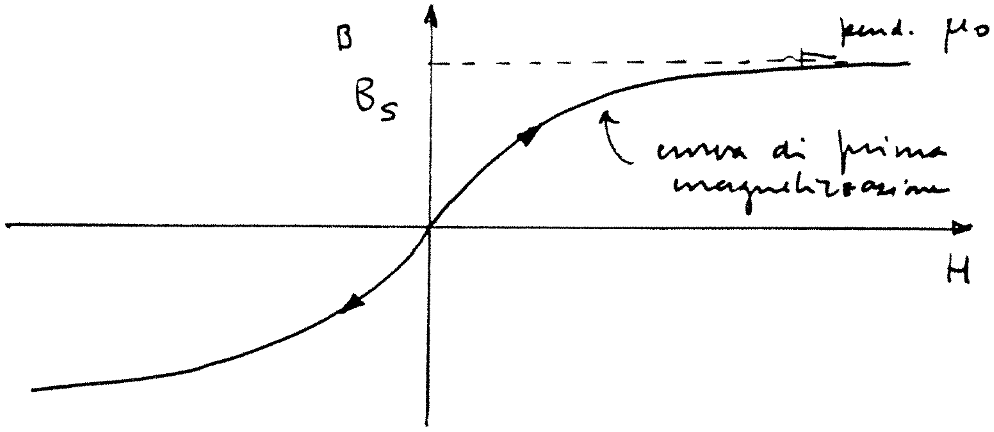
In un mezzo materiale (o nel vuoto) un campo magnetico induce un campo $\underline{B}$ che, in un mezzo LINEARE, è dato dalla relazione di proporzionalità:

$$\underline{B} = \mu \underline{H}$$

ove $\mu \to$ permeabilità magnetica, misurata in H/m (henry al metro). Di solito $\mu = \mu_r \mu_0$ ove μ_r è la permeabilità magnetica relativa, μ_0 la permeabilità magnetica del vuoto: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m.

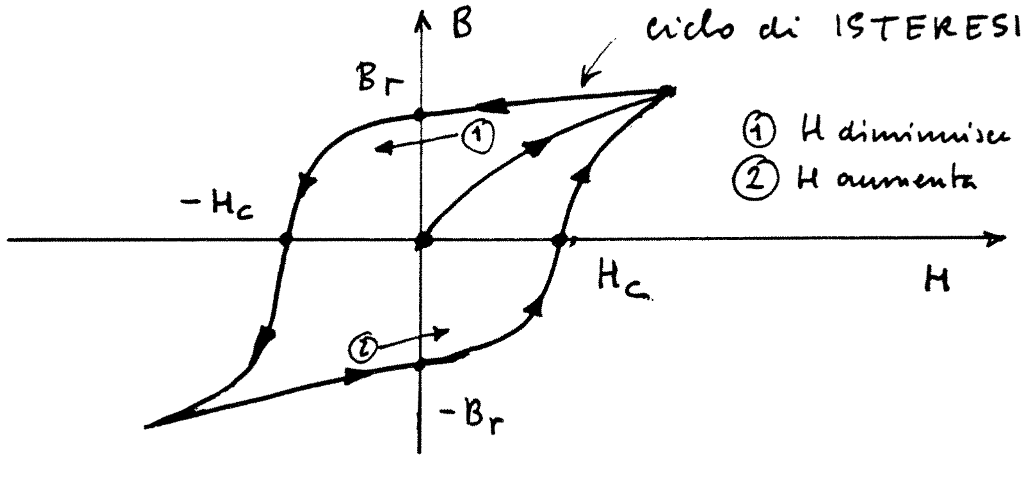
Peraltro in molti materiali di importanza pratica, caratterizzati da μ_r elevata, la relazione $B(H)$ non è lineare. Questo accade ad es. nei materiali FERROMAGNETICI (ferro, nickel, cobalto) e nei materiali FERRIMAGNETICI (ferriti, di composizione analoga alla ceramica: sono i materiali magnetici maggiormente utilizzati in elettronica).

In questi materiali, sottoposti per la prima volta ad un campo $\underline{H}$, $\underline{B}$ segue una curva detta CURVA DI PRIMA MAGNETIZZAZIONE:



B_s è detta densità di flusso di saturazione. Per campi magnetici elevati il materiale è completamente magnetizzato, e ogni ulteriore aumento di H produce un aumento di B pari a $\Delta B = \mu_0 \Delta H$.

Quando in un materiale magnetizzato H viene diminuito il materiale non segue la curva di prima magnetizzazione ma resta magnetizzato, almeno in parte; per smagnetizzare il materiale è necessario sottoporlo ad un campo magnetico contrario, detto CAMPO COERCITIVO, H_c

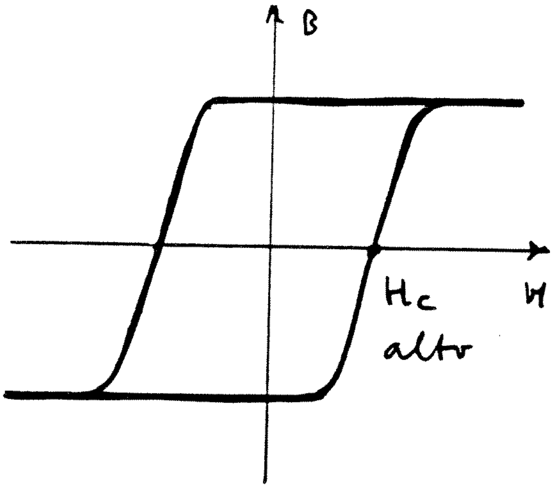


B_r è detta INDUZIONE residua, e la curva chiusa così ottenuta CICLO DI ISTERESI.

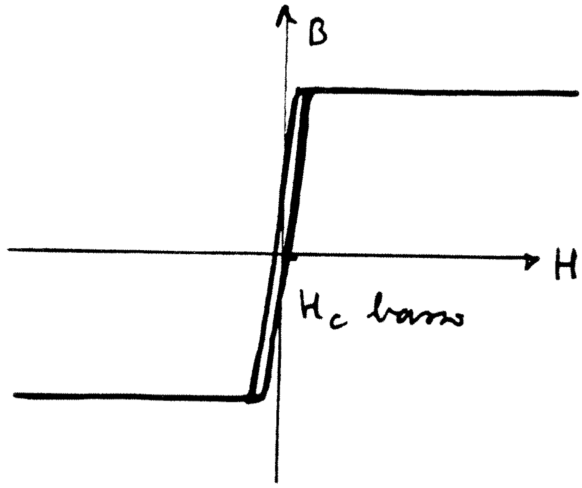
I materiali magnetici si dividono in:

1) Materiali duri (hard) caratterizzati da H_c elevato; sono utilizzati ad es. per magneti permanenti. Sono materiali che difficilmente si magnetizzano.

2) Materiali dolci (soft) hanno una H_c basso; il ciclo di isteresi può assimilarsi ad una unica curva. Sono impiegati per applicazioni quali: induttori, trasformatori, macchine elettriche.

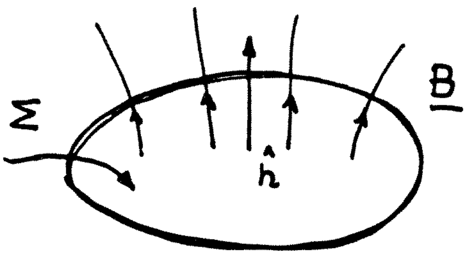


Materiale duro



Materiale dolce

<u>FLUSSO MAGNETICO</u> ϕ o ψ [Wb] (Weber) attraverso una superficie Σ, è il flusso del vettore $\underline{B}$ attraverso Σ:

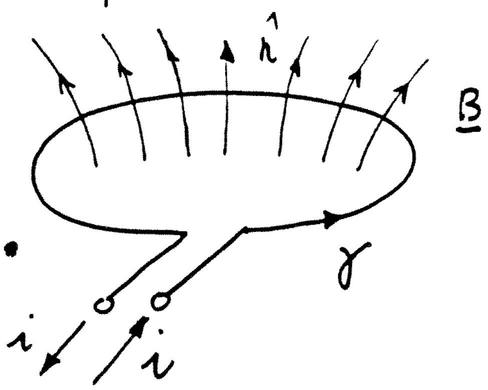


$$\phi = \int_\Sigma \underline{B} \cdot \hat{n} \, d\sigma$$

Se $\underline{B}$ è uniforme su Σ e parallelo alla normale, allora $\phi = B \cdot S$ dove S è l'area della superficie Σ.

CORRENTE E FLUSSO

Si è visto che una corrente elettrica induce un campo $\underline{H}$, quindi un campo $\underline{B}$, e quindi anche il flusso di $\underline{B}$ attraverso una superficie. Una situazione tipica si ha quando i percorre una spira e si considera il flusso concatenato con la spira:



In un mezzo lineare si ha $\underline{H} \propto i$, $\underline{B} \propto \underline{H}$, $\phi \propto \underline{B}$, ossia:

$$\phi \propto i$$

o anche:

$$\phi = L i$$

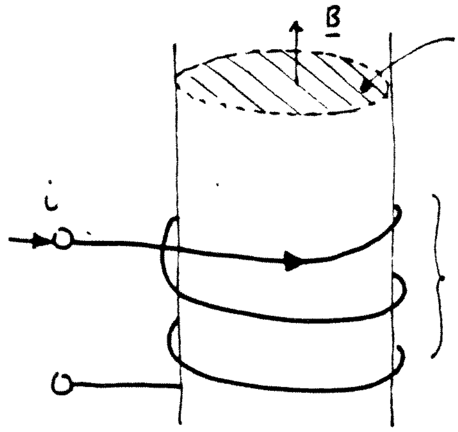
ove il coefficiente L dipende dalla geometria e si dice INDUTTANZA, misurata in H (Henry ; $1H = 1Wb/1A$).

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "\phi = Li"'] & \underline{H} \arrow[r] & \underline{B} \arrow[r] & \phi \end{tikzcd}$$

Schema campi magnetici

FLUSSO E FLUSSO CONCATENATO

Spesso conviene distinguere fra il flusso ϕ individuato da una superficie ed il flusso totale concatenato con un avvolgimento composto da N spire



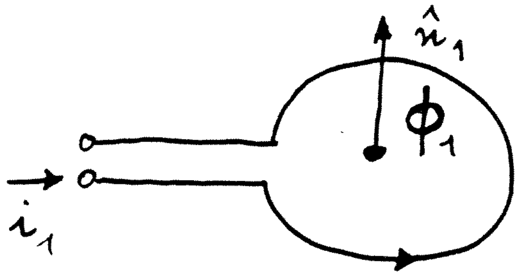
Σ, flusso di $\underline{B}$ su Σ : $\psi = \int_\Sigma \underline{B}\cdot\hat{n}\,d\sigma$

$N=3$: ϕ = flusso totale concatenato con le N spire

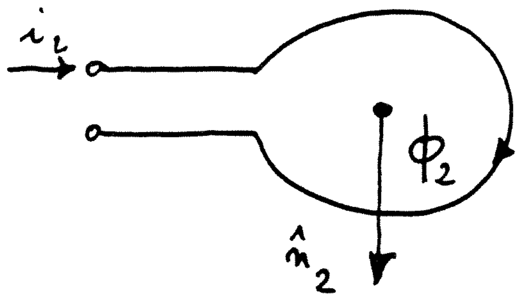
$= N\psi$

CONVENZIONI DI SEGNO PER IL FLUSSO

Esattamente come la corrente, il flusso è una grandezza scalare con segno. Si prende come verso positivo per il flusso concatenato con una spira quello secondo la convenzione:



$$\phi_1 = \int \underline{B}\cdot\hat{n}_1\,d\sigma$$



$$\phi_2 = \int \underline{B}\cdot\hat{n}_2\,d\sigma$$

$$i_1 = -i_2, \qquad \phi_1 = -\phi_2, \qquad \hat{n}_1 = -\hat{n}_2$$

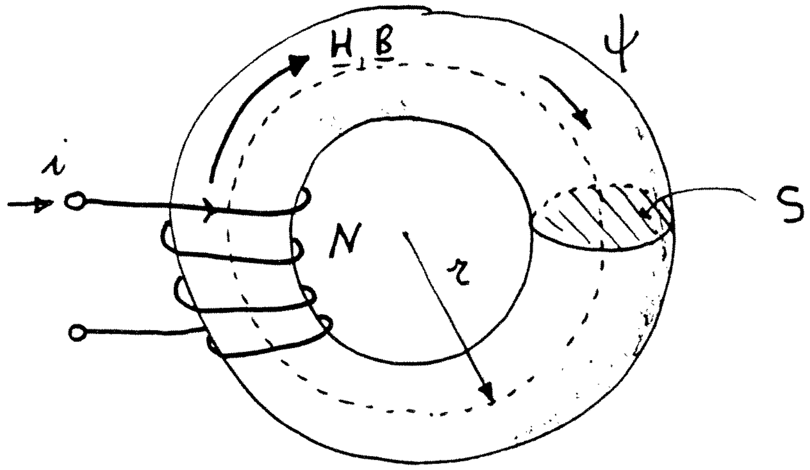
Si noti che in questo modo si è solamente introdotta una convenzione di segno; ϕ_1 e ϕ_2 saranno poi positive o negative a seconda del campo effettivamente presente nella spira. Tuttavia:

$\phi_1 > 0$ se il campo $\underline{B}$ è prodotto da $i_1 > 0$

$\phi_2 > 0$ se il campo $\underline{B}$ è prodotto da $i_2 > 0$

ESEMPIO: SOLENOIDE TOROIDALE

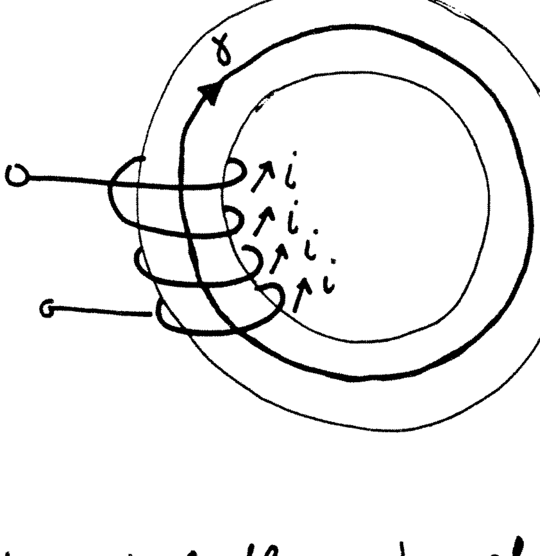
Consideriamo un toro formato da un materiale con μ_r elevata (per semplicità, supposto lineare). In questo caso si può ritenere che il campo magnetico indotto da un avvolgimento avvolto su una sezione del toro ("nucleo magnetico") sia praticamente nullo ovunque aldifuori del nucleo stesso e sia circa uniforme all'interno del nucleo



$L = 2\pi r$ lunghezza del nucleo

S = sezione del nucleo

Applichiamo il teorema di Ampère ad un percorso γ situato verso il centro del nucleo; allora:



$$\oint_\gamma \underline{H}\cdot d\underline{l} \sim H\cdot L = Ni$$

ma, supposto $\underline{H}$ circa uniforme all'interno del nucleo, si ha:

$$\psi = B\cdot S = \mu_r\mu_0 H\cdot S$$

da cui il flusso ψ nel nucleo è:

$$\psi = \mu_r\mu_0 S\cdot\frac{1}{L}Ni = \frac{\mu_r\mu_0 S}{L}Ni$$

Si noti che il flusso ψ nel nucleo è legato al prodotto

Ni attraverso il parametro:

$$\mathcal{P} = \mu_0 \mu_r S / L$$

detto permeanza del nucleo, o il suo inverso:

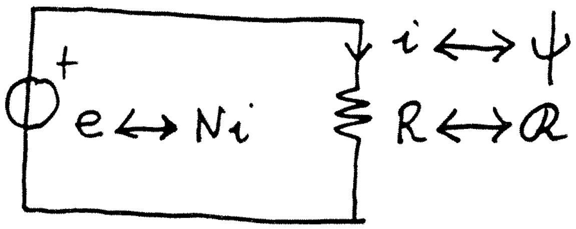
$$\mathcal{R} = L / \mu_0 \mu_r S$$

detto riluttanza del nucleo. Si può scrivere allora:

$$\psi = \mathcal{P} \cdot Ni$$

$$\mathcal{R}\psi = Ni$$

Si noti l'analogia formale con un circuito elettrico:



$$\mathcal{R}\psi = Ni$$
$$Ri = e$$

Il prodotto Ni, per analogia con la FORZA ELETTROMOTRICE e, è detto FORZA MAGNETOMOTRICE. La legge: $Ni = \mathcal{R}\psi$ è detta legge di Ohm magnetica o di HOPKINSON. Si noti che la resistenza di un filo di sezione S, lunghezza L e conducibilità $\gamma = \mu_r \mu_0$ equivale formalmente alla sua riluttanza.

Il flusso ϕ concatenato con le N spire è $\phi = N\psi$, da cui:

$$\phi = \frac{N^2}{\mathcal{R}} i = L i$$

ossia:

$$\boxed{L_{ind.} = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \frac{N^2}{L/\mu_0 \mu_r S}}$$

induttanza di un avvolgimento di N spire su di un nucleo toroidale di materiale magnetico lineare.

ESEMPIO Calcolare l'induttanza di un solenoide toroidale lungo 5 cm, con sezione $1\ mm^2$, $\mu_r = 1000$, $N=100$.

Si ha:

$$\mathcal{R} = \frac{L}{\mu_0 \mu_r S} = \frac{5\times 10^{-2}}{1000 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 10^{-6}}$$

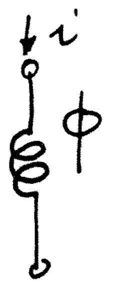
$$= 4 \times 10^{7}\ H^{-1}$$

da cui:

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \frac{100^2}{4\times 10^{7}} = 250\ \mu H$$

INDUTTORE LINEARE

Il solenoide toroidale è un esempio di induttore lineare, un componente che, percorso da una corrente i, immagazzina un flusso magnetico ϕ:

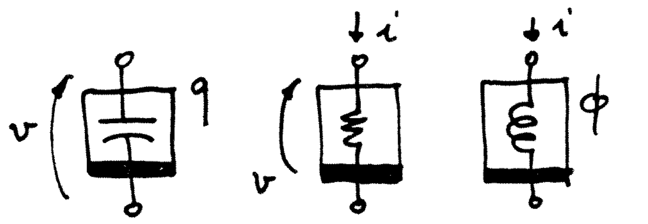


$$\phi = L i$$

L è detta induttanza e si misura in H (Henry).

CONDENSATORI, RESISTORI, INDUTTORI NON LINEARI

Sono caratterizzati da relazioni costitutive generali:



$q = q(v)$ $\quad v = v(i)$ $\quad \phi = \phi(i)$

Si noti che induttori su nuclei ferromagnetici sono, in linea di principio, non lineari; viceversa condensatori e resistori non lineari non si possono di solito ricavare sulla base di materiali di per sé non lineari, ma sono ricavati in modo più complesso (ad es. mediante dispositivi a semiconduttore).

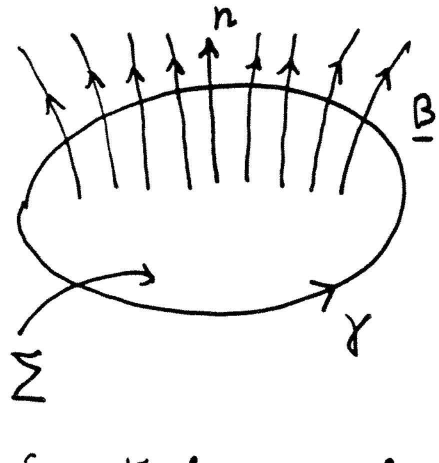
ELETTROMAGNETISMO

I campi elettrici e di corrente introdotti finora sono disaccoppiati dai campi magnetici (se si eccettua la possibilità di indurre un campo $\underline{H}$ attraverso una corrente i di conduzione causata da una tensione applicata, ossia da un campo elettrico). Come si vedrà subito, l'accoppiamento tra le catene dei campi elettrici e magnetici avviene a causa della variazione nel tempo dei campi stessi. In altri termini, campi statici sono disaccoppiati, campi tempo-varianti sono accoppiati.

LEGGE DI FARADAY-LENZ

Si consideri una curva γ nello spazio, orientata in senso antiorario, che funge da bordo alla superficie Σ con normale orientata verso l'esterno, secondo le convenzioni già vista. Si ha allora:

$$\oint_\gamma \underline{E} \cdot d\underline{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_\Sigma \underline{B} \cdot \hat{n}\, d\sigma$$

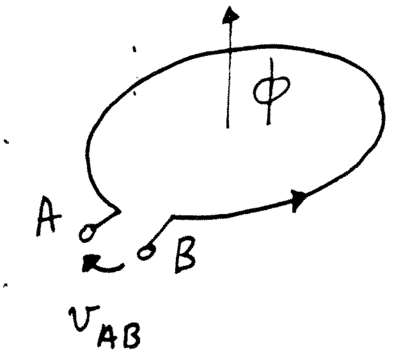


ossia, detta e la FORZA ELETTROMOTRICE INDOTTA su γ, si ha:

$$e = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

ove ϕ è il FLUSSO CONCATENATO con la SPIRA γ.

Si noti che se nel campo $\underline{B}$ è immersa una spira metallica interrotta (ossia in circuito aperto) la forza elettromotrice si localizza in corrispondenza della apertura perchè la spira metallica in circuito aperto è equipotenziale:



$$\oint_\gamma \underline{E} \cdot d\underline{l} = \cancel{\int_B^A \underline{E} \cdot d\underline{l}} + \int_A^B \underline{E} \cdot d\underline{l}$$

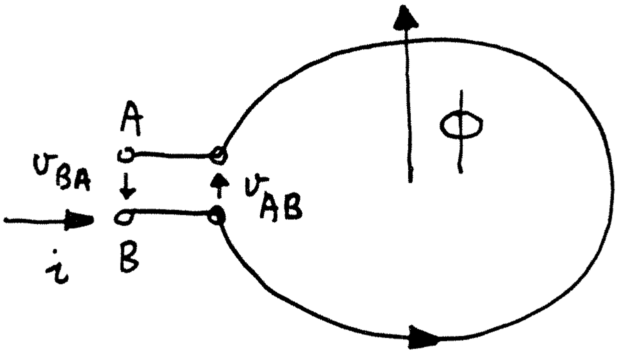
$$= -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

ossia:

$$v_{AB} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

FORZA CONTROELETTROMOTRICE

Supponiamo ora che la presenza di un flusso ϕ sia causata da una corrente i che fluisce in una spira di resistenza trascurabile (tale che quindi la caduta di potenziale su di essa sia trascurabile). Si ha allora:



$$v_{AB} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

ossia:

$$v_{BA} = \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Pertanto ai capi di una spira percorsa da corrente si manifesta una forza CONTROELETTROMOTRICE tale da opporsi al passaggio della corrente stessa. Ad. se i cresce, ϕ cresce, $v_{BA} > 0$ ossia tende a indurre nel circuito esterno collegato con la spira una corrente contraria ad i. Poichè $\phi = Li$ si ha anche:

$$v_{BA} = L \, di/dt$$

CORRENTE DI SPOSTAMENTO

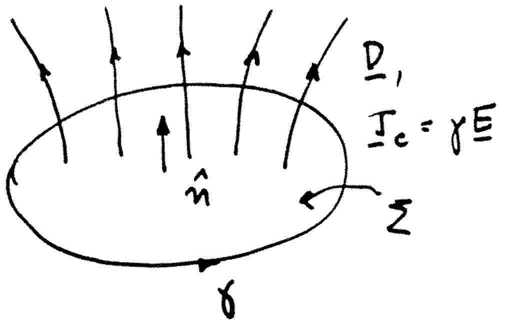
Il flusso del vettore $\underline{D}$ è, dimensionalmente, una carica. Se $\underline{D}$ varia nel tempo la variazione di carica corrispondente causa una corrente (densità di corrente) detta corrente o densità di corrente di spostamento. Si ha cioè:

$$\underline{J}_s = \frac{\partial}{\partial t}\underline{D}$$

$$i_S = \int_\Sigma \underline{J}_s \cdot \hat{n}\, d\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma \underline{D} \cdot \hat{n}\, d\sigma$$

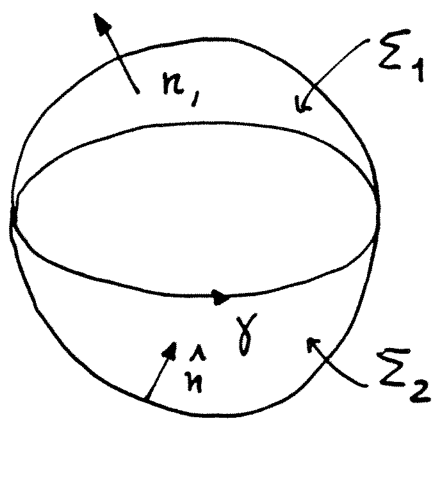
LEGGE DI AMPERE GENERALIZZATA

Equivale alla legge di Ampère già vista ma considera una corrente i formata da due possibili componenti: la corrente di spostamento i_S e la corrente di conduzione i_c. Si ha quindi:



$$\oint_\gamma \underline{H} \cdot d\underline{l} = \frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma \underline{D} \cdot \hat{n}\, d\sigma + \int_\Sigma \gamma \underline{E} \cdot \hat{n}\, d\sigma = i_S + i_c$$

PRINCIPIO DI KIRCHHOFF GENERALIZZATO



Si ha dalla legge di Ampère generalizzata:

$$\oint_\gamma \underline{H} \cdot d\underline{l} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma_1} \underline{D} \cdot \hat{n}_1\, d\sigma + \int_{\Sigma_1} \gamma \underline{E} \cdot \hat{n}_1\, d\sigma$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma_2} \underline{D} \cdot \hat{n}_2\, d\sigma + \int_{\Sigma_2} \gamma \underline{E} \cdot \hat{n}_2\, d\sigma$$

che si può scrivere nella forma:

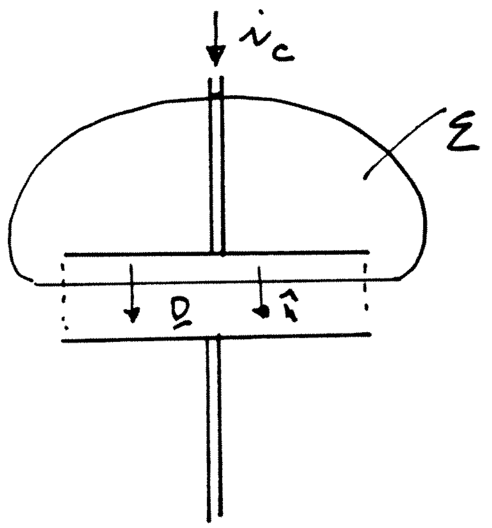
$$\underset{\substack{\text{entranti in} \\ \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2}}{i_s + i_c} = \underset{\substack{\text{uscenti da} \\ \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2}}{i_s + i_c}$$

o anche, detta Σ la superficie chiusa risultante dalle unione di Σ_1 e di Σ_2:

$$\underset{\text{entranti in } \Sigma}{\sum i_s + \sum i_c} = 0$$

Si noti che questo equivale al principio di Kirchhoff, nel quale si sono introdotte le correnti di spostamento oltre a quelle di conduzione.

CORRENTI IN UN CONDENSATORE



La corrente entrante in un condensatore si può calcolare mediante il principio di Kirchhoff generalizzato; infatti:

$$\underset{\text{entrante in } \Sigma}{i_c} = \underset{\text{uscente da } \Sigma}{i_s}$$

Ma i_c (corrente di conduzione) dà contributo diverso da $\emptyset$ solo in corrispondenza del filo di ingresso; i_s (corrente di spostamento) è nulla ovunque tranne che nel tratto compreso fra le due armature. Si ha allora:

$$i_s = \frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma \underline{D}\cdot\hat{n}\, d\sigma =$$

$$= \epsilon S \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\epsilon S}{h}\frac{dv}{dt} = C\frac{dv}{dt}$$

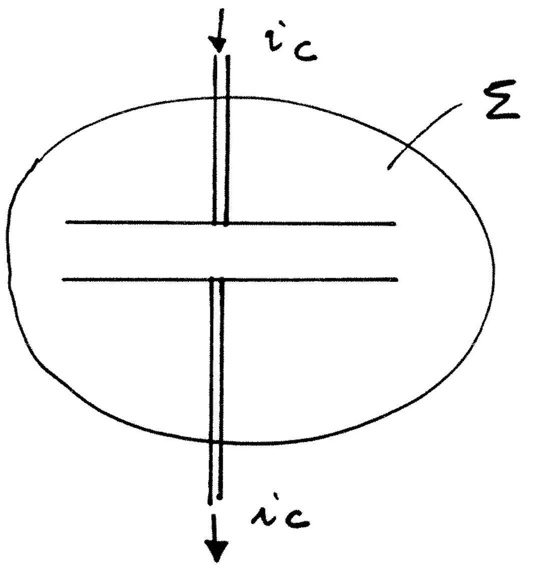
ossia:

$$\underset{\substack{\text{entrante in}\\ \Sigma}}{i_C} = C\,\frac{dv}{dt}$$

Si noti che si poteva anche scrivere:

$$i_C = \frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma \underline{D}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \frac{dq}{dt}$$

assumendo che l'integrale sia esteso ad una superficie chiusa e che quindi $\underline{D}$ sia nullo ovunque tranne che fra le armature del condensatore.



Poiché in Σ entrano solo correnti di conduzione si può concludere che la corrente entrante ed uscente da un condensatore è:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

ove q è la carica accumulata nel condensatore. In un circuito elettrico le correnti di spostamento sono trascurabili ovunque, tranne che fra le armature dei condensatori; è possibile allora applicare il principio di Kirchhoff in forma ristretta tutte le volte che si considerano superfici che non tagliano l'interno di un condensatore, ossia si fa riferimento alle sole correnti ai morsetti del condensatore.

Per un condensatore lineare: $i = C\,dv/dt$

MEZZI MATERIALI : CLASSIFICAZIONE

In linea di principio un mezzo materiale è contraddistinto da una permettività dielettrica ϵ, una permeabilità magnetica μ e una conduttanza γ. Da un punto di vista tecnico si distinguono peraltro i mezzi materiali a seconda di quale fra le caratteristiche sia dominante. Si hanno così:

A) MATERIALI ISOLANTI O DIELETTRICI che hanno $\mu = \mu_0$, $\gamma \approx 0$, $\epsilon_r > 1$. Un dielettrico è caratterizzato da una proprietà (la rigidità dielettrica) che indica il campo elettrico massimo cui il materiale può essere sottoposto senza dare luogo a scarica (ossia ad una perforazione distruttiva del materiale stesso)

B) MATERIALI CONDUTTORI hanno $\mu_r \gg 1$, γ molto elevato. Sono tutti i metalli e molti semiconduttori. Un materiale conduttore è sede di un campo di corrente quando sottoposto ad una differenza di potenziale.

C) MATERIALI MAGNETICI hanno $\mu_r \gg 1$, $\epsilon \sim \epsilon_0$, γ relativamente basso o anche abbastanza elevato. I materiali magnetici più importanti sono i materiali FERROMAGNETICI, dotati di γ elevato vista la loro natura di metalli (ad es. Fe). Poiché la caratteristica di avere γ elevato è negativa, si tenta di abbassare γ con accorgimenti opportuni. I materiali FERRIMAGNETICI (le FERRITI) sono viceversa materiali magnetici con basso γ, analoghi per composizione chimica alle ceramiche; sono molto usati in elettronica.

SOMMARIO: TENSIONI, CORRENTI, CARICHE, FLUSSI

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\phi \arrow[r, leftrightarrow, "L"] \arrow[d, "\frac{\partial}{\partial t}"'] & i \\
v \arrow[ur, leftrightarrow, "R"] \arrow[r, leftrightarrow, "C"'] & q \arrow[u, "\frac{\partial}{\partial t}"']
\end{tikzcd}
$$

SOMMARIO: CAMPI

Le equazioni relative ai campi prendono il nome di EQUAZIONI DI MAXWELL (in forma integrale):

$$\oint_\gamma \underline{E} \cdot d\underline{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma \underline{B} \cdot \hat{n}\, d\sigma$$

$$\oint_\gamma \underline{H} \cdot d\underline{l} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma \underline{D} \cdot \hat{n}\, d\sigma}_{\underline{J}_s} + \underbrace{\int_\Sigma \gamma \underline{E} \cdot \hat{n}\, d\sigma}_{\underline{J}_c}$$

uniti alle relazioni costitutive:

$$\underline{B} = \mu \underline{H}$$

$$\underline{P} = \epsilon \underline{E}$$

$$\underline{J}_e = \gamma \underline{E}$$