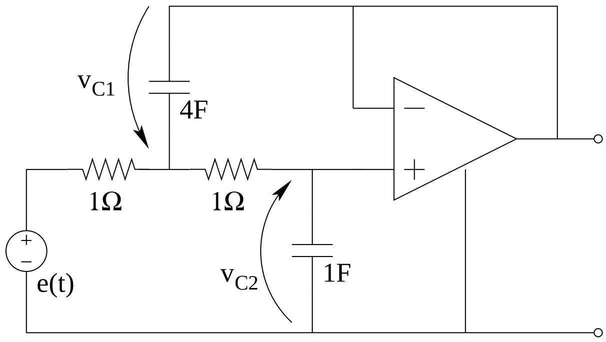
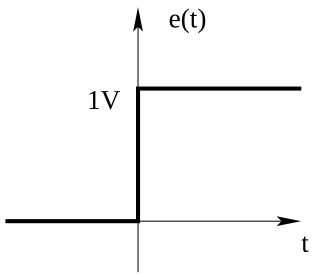
0.1 Esercizio sulle reti del secondo ordine.





Si consideri la rete in figura.
Si calcolino

- $v_{C2}(t)$
- $v_{C1}(t)$

per t>0.

Calcolo delle condizioni iniziali:

Calcoliamo le condizioni iniziali della rete con 'e(t)=1' come condizioni 'finali' dell'evoluzione della rete con e(t)=0. Si noti che tale ragionamento ha senso solamente quando ci si riferisce alle variabili di stato, ovvero alla tensione sui condensatori. Essendo rimasto il generatore e(t) ad un valore nullo per un tempo tendente ad infinito, supponiamo che la rete abbia raggiunto i suoi valori asintotici e calcoliamo quindi tali valori. (Si noti che dovremo verificare tale affermazione in seguito: stiamo infatti supponento di non essere nella condizione in cui vi siano oscillazioni indefinite).

Sostituiamo quindi ai due condensatori due circuiti aperti ottenendo:
$v_{C1\infty} = 0$; $v_{C2\infty} = 0$.
Questi valori saranno utilizzati come condizioni iniziali per il transitorio per t>0, quindi:

$$v_{C1}(0) = 0 \qquad (1)$$

$$v_{C2}(0) = 0 \qquad (2)$$

Calcolo dei valori asintotici

Sostituiamo ad ogni condensatore un circuito aperto ed otteniamo:

$$\boxed{\begin{array}{l} v_{C1\infty} = 0 \\ v_{C2\infty} = 1 \end{array}}$$

Scrittura delle equazioni di stato:

Per ottenere tali equazioni dobbiamo ottenere una forma del tipo:

$$\begin{cases} \frac{dv_{C1}}{dt} = a_{11}v_{C1} + a_{12}v_{C2} + f_1(t) \\ \frac{dv_{C2}}{dt} = a_{21}v_{C1} + a_{22}v_{C2} + f_2(t) \end{cases}$$

ovvero una forma del tipo:

$$\dot{X} = AX + U$$

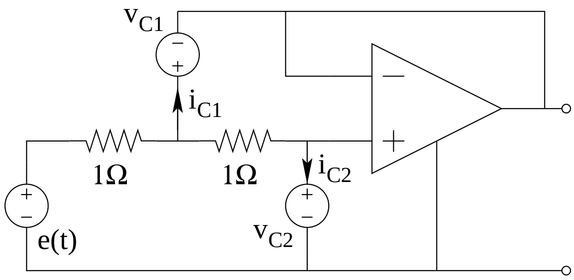
con:
X vettore di stato $\begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix}$
A matrice di stato
U vettore di ingresso $\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$

In particolare, le funzioni $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ saranno delle costanti, dato che nell'intervallo in cui la stiamo studiando la rete contiene solamente dei generatori impressivi costanti ($e(t) = 1V$ per $t > 0$).

Per scrivere le equazioni di stato dobbiamo:

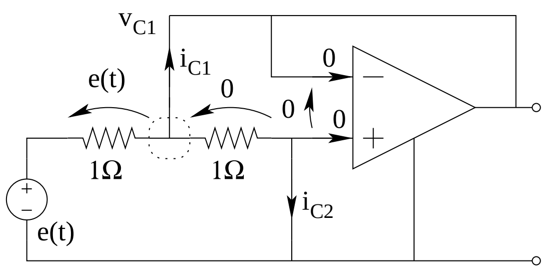
- Ricavare (analizzando la rete) le grandezze duali delle variabili di stato (in questo caso i_{C1} ed i_{C2}) in funzione delle variabili di stato stesse.
- Utilizzare le relazioni costitutive dei due elementi dinamici per sostituire i_{C1} ed i_{C2}, ottenendo le equazioni di stato.

Per ricavare le grandezze duali delle variabili di stato possiamo, nella nostra rete, sostituire agli elementi dinamici (C_1 e C_2) dei generatori di valore pari alle variabili di stato, ovvero due generatori di tensione di valore v_{C1} e v_{C2}.



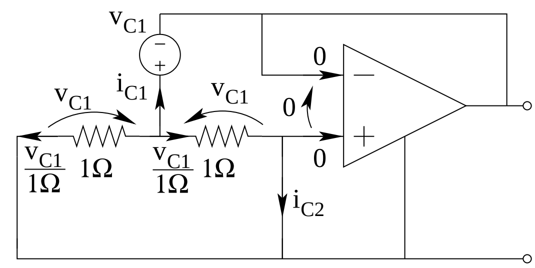
Utilizziamo, ad esempio, il principio di sovrapposizione degli effetti.

- Effetto di e(t):



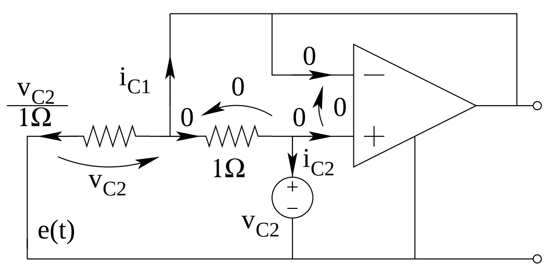
$$i'_{C1} = \frac{e(t)}{1\Omega}$$
$$i'_{C2} = 0$$

- Effetto di v_{C1} :



$$i''_{C1} = -2\frac{v_{C1}}{1\Omega}$$
$$i''_{C2} = \frac{v_{C1}}{1\Omega}$$

- Effetto di v_{C2}



$$i'''_{C1} = -\frac{v_{C2}}{1\Omega}$$
$$i'''_{C2} = 0$$

Applichiamo quindi la sovrapposizione degli effetti, sommando i termini appena trovati:

$$\begin{cases} i_{C1} = & (-2)v_{C1} + (-1)v_{C2} + e \\ i_{C2} = & (1)v_{C1} + (0)v_{C2} + 0 \end{cases}$$

Sostituiamo le correnti al primo membro con le relazioni costitutive ricavando le equazioni di stato:

$$\begin{cases} C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} = & (-2)v_{C1} + (-1)v_{C2} + e \\ C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} = & (1)v_{C1} + (0)v_{C2} + 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv_{C1}}{dt} = & (-\frac{2}{4})v_{C1} + (-\frac{1}{4})v_{C2} + \frac{1}{4} \\ \frac{dv_{C2}}{dt} = & (1)v_{C1} + (0)v_{C2} + 0 \end{cases} \tag{3}$$

Si noti che ad e(t) è stato sostituito il valore di 1V, dato che stiamo studiando la rete per $t > 0$.

Calcolo della soluzione

Ottenute le equazioni di stato, troviamo la soluzione del sistema.

La matrice di stato è:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La sua traccia vale:

$$T = a_{11} + a_{22} = -\frac{1}{2}$$

quindi il coefficiente di smorzamento α è:

$$\alpha = -\frac{T}{2} = \frac{1}{4}$$

Il determinante della matrice è: $\Delta = 0 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$ per cui la pulsazione di risonanza sarà:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Si noti che le condizioni di stabilità sono verificate ($T < 0$ e $\Delta > 0$). Inoltre, essendo il coefficiente di smorzamento maggiore di zero, possiame escludere di essere nel caso di circuito senza smorzamento, quindi è verificata l'ipotesi fatta precedentemente per calcolare valori iniziali ed asintotici.

Noti coefficiente di smorzamento α e pulsazione di risonanza ω_0 possiamo scrivere l'equazione caratteristica

$$x^2 + 2\alpha x + \omega_0^2 = 0 \rightarrow x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$$

Le soluzioni di tale equazione (ovvero le frequenze naturali della rete) sono:

$$x = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{1}{4}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{-3}}{4} = -\frac{1}{4} \pm j\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Abbiamo ottenuto due radici complesse coniugate (dato che $\alpha < \omega_0$) e quindi la soluzione deve essere del tipo:

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left[A_1 \cos(\beta t) + A_2 \sin(\beta t)\right] + x_\infty$$

per tutte le grandezze della rete, con $\alpha = \frac{1}{4}$ e $\beta = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Otteniamo quindi, per le tensioni cercate:

$$\begin{cases} v_{C1}(t) = & e^{-\frac{t}{4}}\left[A_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}t\right)+A_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right]+\underbrace{v_{C1\infty}}_{0} \\ v_{C2}(t) = & e^{-\frac{t}{4}}\left[A_3\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}t\right)+A_4\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right]+\underbrace{v_{C2\infty}}_{1V} \end{cases} \tag{4}$$

Per calcolare i valori delle costanti mancanti, si sfruttano le condizioni iniziali, valutando le relazioni trovate ed uguagliandole ai valori iniziali noti. Dalle (4) otteniamo:

$$v_{C1}(0) = 1\left[A_1 cos(0) + A_2 sin(0)\right] = A_1$$

$$v_{C2}(0) = 1\left[A_3 cos(0) + A_4 sin(0)\right] + 1 = A_3 + 1$$

da cui, uguagliando i secondi membri alle (1) ed (2)

$$A_1 = 0$$

$$A_3 + 1 = 0 \rightarrow A_3 = -1$$

Per calcolare le altre due costanti, si valutano le derivate di v_{C1} e v_{C2} per $t = 0^+$: Ogniuna di esse viene calcolata prima con le equazioni di stato (sostituendovi le condizioni iniziali) e poi derivando le (4). Uguagliando i risultati si ottiene una equazione che consente di calcolare le costanti cercate.

Dalla prima equazione di stato (3) otteniamo (per v_{C1})

$$\frac{dv_{C1}(0^+)}{dt} = (-\frac{2}{4})v_{C1}(0) + (-\frac{1}{4})v_{C2}(0) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

dalla prima equazione delle (4):

$$\left.\frac{dv_{C1}}{dt}\right|_{t=0+} = \frac{d}{dt}\left.\left\{e^{-\frac{t}{4}}\left[A_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}t\right)+A_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right]+v_{C1\infty}\right\}\right|_{t=0+} = -\alpha A_1 + \beta A_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4}A_2$$

da cui, uguagliando i due ultimi membri e sostituendo il valore di A_1 già calcolatoin precedenza:

$$\frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{4}A_2 \rightarrow A_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dalla seconda equazione di stato (3) otteniamo (per v_{C2})

$$\left.\frac{dv_{C2}}{dt}\right|_{t=0+} = (1)v_{C1}(0) + (0)v_{C2}(0) + 0 = 0$$

dalla seconda equazione della (4):

$$\left.\frac{dv_{C2}}{dt}\right|_{t=0+} = -\alpha A_3 + \beta A_4 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}A_4$$

Uguagliando i due ultimi membri:

$$0 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}A_4 \rightarrow A_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

L'andamento nel tempo dei due segnali richiesti sarà quindi:

Risultato:

$$v_{C1}(t) = e^{-\frac{t}{4}} \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4} t \right) \right]$$

$$v_{C2}(t) = e^{-\frac{t}{4}} \left[-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4} t \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4} t \right) \right] + 1$$