Simulazione numerica di circuiti elettrici

Corso di ELETTROTECNICA AA 2017/18

Prof. Dario D’Amore

(Per allievi di Ingegneria Matematica)

Risoluzione di un sistema dinamico

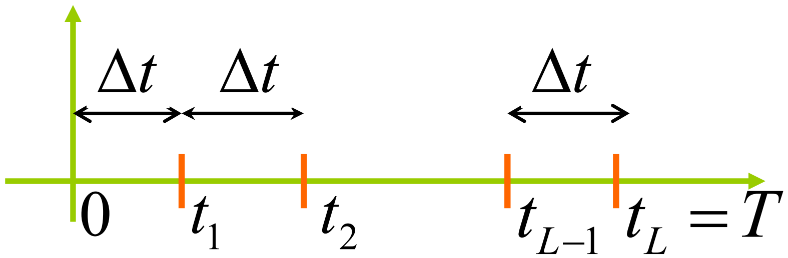
- Un sistema dinamico lineare viene descritto attraverso le equazioni di stato:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

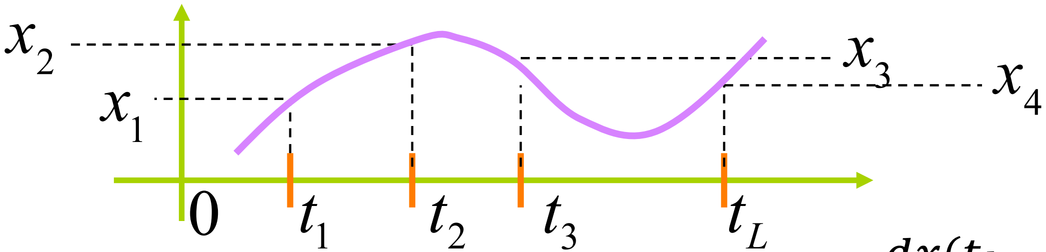
- Una volta noto l'ingresso $u(t)$, la determinazione delle variabili di stato $x(t)$ si ottiene integrando numericamente un sistema di equazioni differenziali ordinarie

Concetti di base dell'integrazione numerica

- Discretizzazione del tempo



- Rappresentazione di $x(t)$ utilizzando i valori negli istanti t_i



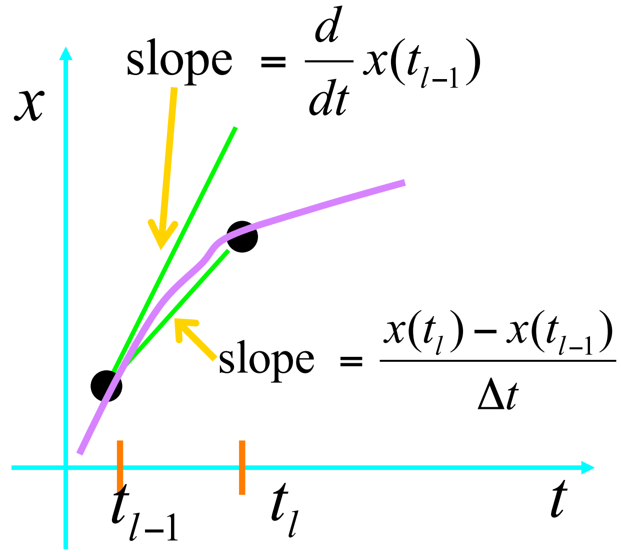
$x_i \cong x(t_i)$

- Approssimazione della derivata $\frac{dx(t_{k-1})}{dt}$...

Approssimazione Forward Euler

- Si approssima la derivata con la pendenza nel primo punto:

$$\frac{x(t_l) - x(t_{l-1})}{\Delta t} \cong \frac{dx(t_{l-1})}{dt}$$



Algoritmo Forward Euler

$$\frac{x_l - x_{l-1}}{\Delta t} = Ax(t_{l-1}) + Bu(t_{l-1})$$

$$x_1 \leftarrow (1 + \Delta t A)x_0 + \Delta t B u(t_0)$$

$$x_2 \leftarrow (1 + \Delta t A)x_1 + \Delta t B u(t_1)$$

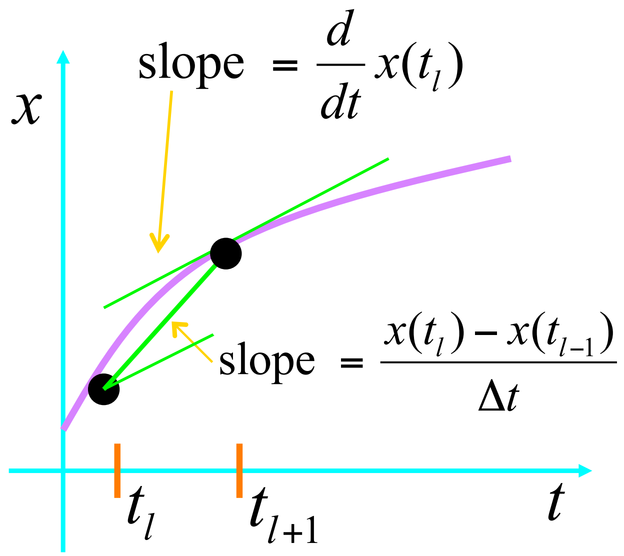
...

$$x_l \leftarrow (1 + \Delta t A)x_{l-1} + \Delta t B u(t_{l-1})$$

Approssimazione Backward Euler

- Di approssima la derivata con la pendenza nel secondo punto:

$$\frac{x(t_l) - x(t_{l-1})}{\Delta t} \cong \frac{dx(t_l)}{dt}$$



Algoritmo Backward Euler

$$\frac{x_l - x_{l-1}}{\Delta t} = Ax(t_l) + Bu(t_l)$$

$$x_1 \leftarrow (1 - \Delta t A)^{-1}(x_0 + \Delta t B u(t_1))$$

$$x_2 \leftarrow (1 - \Delta t A)^{-1}(x_1 + \Delta t B u(t_2))$$

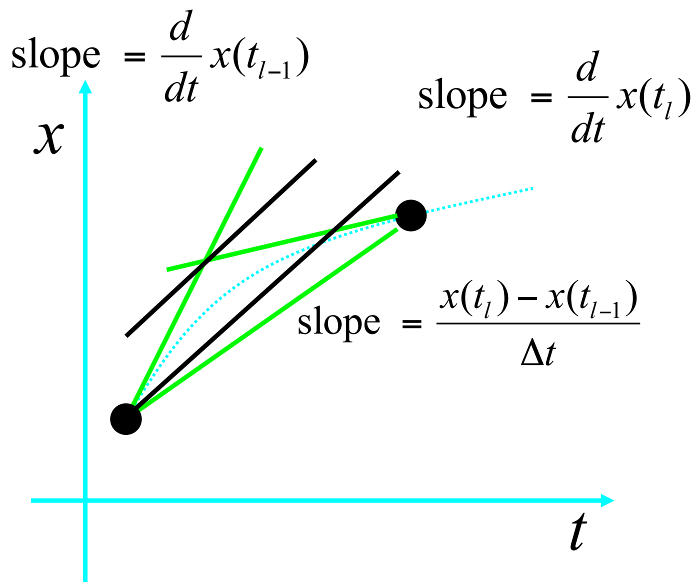
…

$$x_l \leftarrow (1 - \Delta t A)^{-1}(x_{l-1} + \Delta t B u(t_l))$$

Approssimazione Trapezoidal Rule

- Si approssima la derivata con la media delle pendenze sui punti estremi:

$$\frac{x(t_l) - x(t_{l-1})}{\Delta t} \cong \frac{1}{2}\left(\frac{dx(t_{l-1})}{dt} + \frac{dx(t_l)}{dt}\right)$$



Algoritmo Trapezoidal Rule

$$\frac{x_l - x_{l-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(Ax(t_{l-1}) + Bu(t_{l-1}) + Ax(t_l) + Bu(t_l)\right)$$

$$x_1 \leftarrow \left(1 - \frac{\Delta t A}{2}\right)^{-1} \left\{\left(1 + \frac{\Delta t A}{2}\right) x_0 + \frac{\Delta t B}{2}\left(u(t_1) + u(t_0)\right)\right\}$$

$$x_2 \leftarrow \left(1 - \frac{\Delta t A}{2}\right)^{-1} \left\{\left(1 + \frac{\Delta t A}{2}\right) x_1 + \frac{\Delta t B}{2}\left(u(t_2) + u(t_1)\right)\right\}$$

$$\ldots$$

$$x_l \leftarrow \left(1 - \frac{\Delta t A}{2}\right)^{-1} \left\{\left(1 + \frac{\Delta t A}{2}\right) x_{l-1} + \frac{\Delta t B}{2}\left(u(t_l) + u(t_{l-1})\right)\right\}$$

Ordine di integrazione ed errore locale di troncamento

- Valutiamo l'errore che si commette nell'approssimazione

$$b_0 x_0' + b_1 x_1' = \frac{x_1 - x_0}{\Delta t} \quad (1)$$

Dove:

$b_0 = 1, b_1 = 0$ (FE)

$b_0 = 0, b_1 = 1$ (BE)

$b_0 = 1/2, b_1 = 1/2$ (TR)

- Riscriviamo l'equazione (1) con i valori esatti della soluzione $x(t)$nei due istanti t_0 e $t_1 = t_0 + \Delta t$

$$\Delta t(b_0 x'(t_0) + b_1 x'(t_0 + \Delta t)) + x(t_0)\text{-}\ x(t_0 + \Delta t) = 0\ (2)$$

Usando lo sviluppo in serie di Taylor:

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \frac{\Delta t}{1!} x'(t_0) + \frac{\Delta t^2}{2!} x''(t_0) + \frac{\Delta t^3}{3!} x'''(t_0) + \mathrm{O}(\Delta t^4)$$

$$x'(t_0 + \Delta t) = x'(t_0) + \frac{\Delta t}{1!} x''(t_0) + \frac{\Delta t^2}{2!} x'''(t_0) + \frac{\Delta t^3}{3!} x''''(t_0) + \mathrm{O}(\Delta t^4)$$

- Sostituendo nella (2) si ottiene:

$$\Delta t x'(t_0)[b_0 + b_1 - 1] = \Delta t^2 x''(t_0)\left[\frac{1}{2} - b_1\right] + \Delta t^3 x'''(t_0)\left[\frac{1}{6} - b_1/2\right]$$

$c_1 = b_0 + b_1 - 1$=0 : Soddisfatta con tutti i metodi (FE, BE,TR)
$c_2 = \frac{1}{2} - b_1 = 0$: Soddisfatta solo con TR
$c_3 = \frac{1}{6} - \frac{b_1}{2} = 0$: Non soddisfatto

Si definisce ordine p di un metodo di integrazione il massimo ordine di derivata per cui $c_p = 0$
L'errore locale di troncamento (primo termine di errore non nullo) è:
$LTE_{FE} = c_2 \Delta t^2 x''(t_0) = \frac{1}{2}\Delta t^2 x''(t_0)$ (FE: metodo di ordine $p = 1$)
$LTE_{BE} = c_2 \Delta t^2 x''(t_0) = -\frac{1}{2}\Delta t^2 x''(t_0)$ (BE: metodo di ordine $p = 1$)
$LTE_{TR} = c_3 \Delta t^2 x''(t_0) = -\frac{1}{12}\Delta t^3 x'''(t_0)$ (TR: metodo di ordine $p = 2$)

Stabilità di un metodo di integrazione

Quando di integra numericamente una equazione la cui soluzione analitica è asintoticamente stabile, non è detto che anche la soluzione numerica lo sia.

Per discutere la stabilità di un metodo di integrazione numerica usiamo la seguente equazione omogenea:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda x(t), \text{ con } \mathrm{Re}(\lambda) < 0$$

La cui soluzione analitica è:

$$x(t) = x(t_0)e^{\lambda t} \text{ (asintoticamente stabile)}$$

Integriamo con FE per n passi:

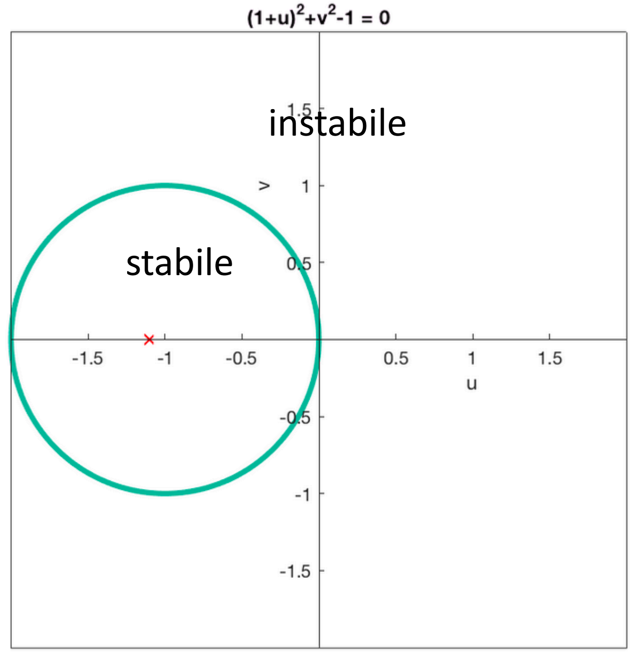
$$x_n = (1 + \lambda\Delta t)^n x_0$$

Dovrà essere:

$$|1 + \lambda\Delta t| \leq 1$$

Poichè λ può anche essere complesso, posto $q = \lambda\Delta t = u + jv$ la condizione di stabilità diventa:

$$(1 + u)^2 + v^2 \leq 1$$



Integriamo con BE per n passi:

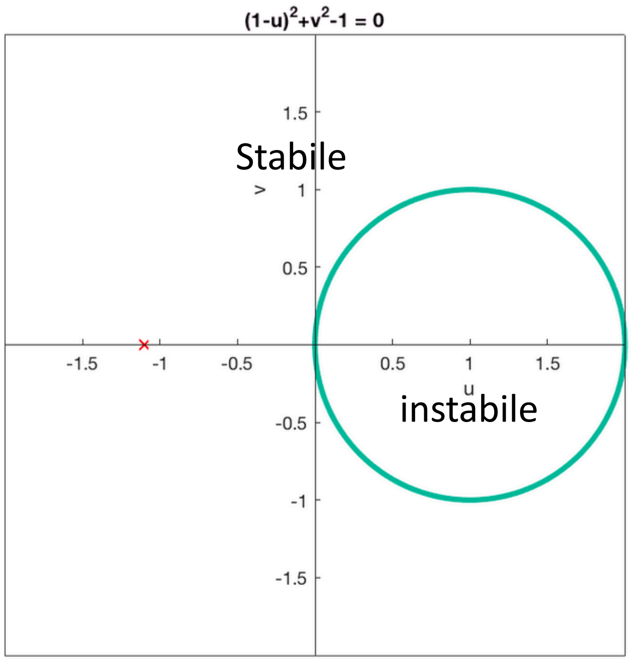
$$x_n = (1 - \lambda \Delta t)^{-n} x_0$$

Dovrà essere:

$$|1 - \lambda \Delta t| \geq 1$$

Poichè λ può anche essere complesso, posto $q = \lambda \Delta t = u + jv$ la condizione di stabilità diventa:

$$(1 - u)^2 + v^2 \geq 1$$



Integriamo con TR per n passi:

$$x_n = \left(\frac{(2 + \lambda\Delta t)}{(2 - \lambda\Delta t)}\right)^n x_0$$

Dovrà essere:

$$\left|\frac{(2 + \lambda\Delta t)}{(2 - \lambda\Delta t)}\right| \leq 1$$

Poichè λ può anche essere complesso, posto $\mathrm{q} = \lambda\Delta t = u + jv$ la condizione di stabilità diventa:

$$u \leq 0$$