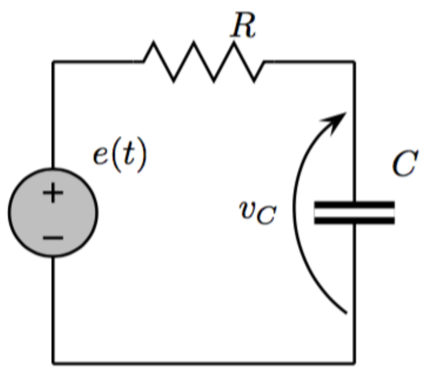
Simulazione numerica della risposta in transitorio di un circuito RC del primo ordine formulato con l'equazione di stato (Trapezoidal Rule)



L'equazione di stato di un circuito del primo ordine è:

$$\dot{x} = Ax(t) + bu(t)$$

Per questo circuito diventa:

$$\dot{x} = -\frac{1}{RC}x + \frac{e}{RC}$$

avendo posto $v_C = x$

Parametri del circuito

```
clc;
clear all;
%e=10;           %ingresso costante
R=1000.0;
C=1.0e-6;
x0=0.0;         %condizione iniziale
A=-1/(R*C);
b=1/(R*C);
tau=-1.0/A;
```

Parametri per la simulazione

```
N = 50;                 %numero di punti usati nella simulazione
Ne = 100;               %numero di punti usati per la rappresentazione della soluzione analitica
```

```
tstop=10e-3;           %intervallo di simulazione
h=tstop/N;             %intervallo di integrazione
time=0:h:tstop;        %vettore (N+1) degli istanti di tempo 0, h, 2h, ..,tstop
he = tstop/Ne;         %intervallo di tempo usato nella rappresentazione della soluzione analiti
%inizializzo il vettore della soluzione, inserendo la cond. ini. come primo valore
x=[x0 zeros(1,N)];           %vettore della soluzione numerica (N+1)
xa=[ x0 zeros(1,Ne)];          %vettore della soluzione analitica (Ne+1)
```

Specifica dell'ingresso:

- Ingresso Costante $e_c(t)$

```
%ingresso costante
E = 10;                          %ampiezza dell'ingresso
ec=E*ones(1,N+1);                %vettore dell'ingresso (N+1)
xpc =E*ones(1,Ne+1);           %soluzione di regime (100+1)
```

- Ingresso Sinusoidale $e_s(t)$

```
%% Ingresso sinusoidale
Emax=10;                              %Ampiezza della sinusoide
Period=0.2*tstop;                     %periodo della sinusoide
Omega = 2*pi/Period;                  %pulsazione della sinusoide
Phi = 0.0;                            %fase della sinusoide
es=Emax*sin(Omega*h*[0:N]+Phi);   %vettore dell'ingresso (N+1)

%soluzione di regime analitica
Phi_ps = Phi-atan(Omega*R*C);
Amp_ps = Emax/(sqrt(1+(Omega*R*C)^2));
xps=Amp_ps*sin(Omega*he*[0:Ne]+Phi_ps); %soluzione di regime analitica
```

Integrazione dell'equazione di stato con Trapezoidal rule (TR)

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \frac{1}{2}\left[Ax_{n+1} + bu_{n+1} + Ax_n + bu_n\right]$$

da cui, risolvendo rispetto ad x_{n+1} si ha:

$$x_{n+1} = \frac{(1 + hA/2)}{(1 - hA/2)}x_n + \frac{(hB/2)}{(1 - hA/2)}(u_{n+1} + u_n)$$

Simulazione della risposta ad ingresso costante (u(t)=ec)

- Integrazione con TR

```
M1 = 1-h*A/2;
M2 = 1+h*A/2;
M3 = h*b/2;
invM1 = 1.0/M1;

for i=1:N
    x(i+1) = invM1 * (M2*x(i) + M3 * (ec(i+1)+ec(i)));
```

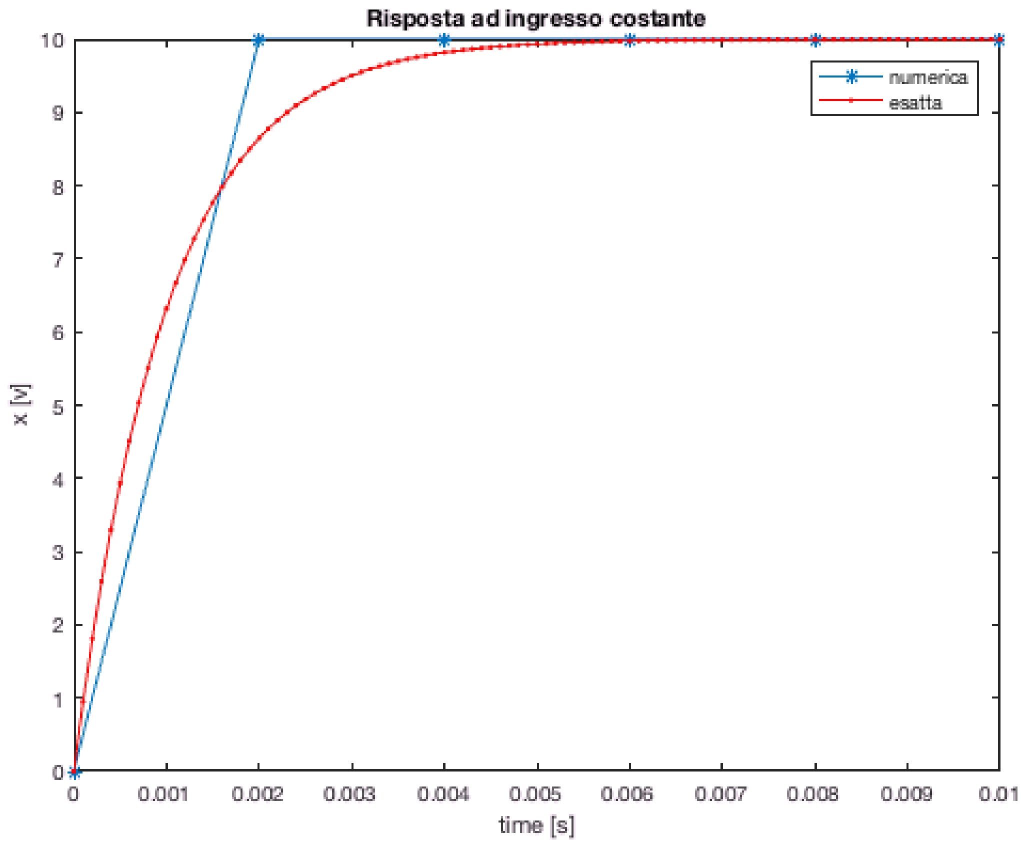
```
end
```

- Calcolo della soluzione analitica

```
for i=1:Ne
    xa(i+1) = (xa(1)-xpc(1))*exp(A*i*he)+xpc(i+1);
end
```

- Plot della soluzione numerica e di quella esatta (in rosso)

```
plot(time,x,'-*', [0:100]*he,xa,'.-r');
title('Risposta ad ingresso costante')
xlabel('time [s]')
ylabel('x [v]')
legend('numerica', 'esatta')
```



Simulazione della risposta ad ingresso sinusoidale (u(t)=es)

- Integrazione con TR

```
M1 = 1-h*A/2;
M2 = 1+h*A/2;
M3 = h*b/2;
```

```
invM1 = 1.0/M1;

for i=1:N
    x(i+1) = invM1 * (M2*x(i) + M3*(es(i+1)+es(i)));
end
```

- Calcolo della soluzione analitica

```
for i=1:Ne
    xa(i+1) = (xa(1)-xps(1))*exp(A*i*he)+xps(i+1);
end
```

- Plot della soluzione numerica e di quella esatta (in rosso)

```
plot(time,x,'-*',[0:100]*he,xa,'.-r');
title('Risposta ad ingresso sinusoidale')
xlabel('time [s]')
ylabel('x [v]')
legend('numerica', 'esatta')
```