

# Metodo di composizione delle caratteristiche

Nota del corso di Elettrotecnica A  
a cura di Lorenzo Codecasa

## I. Bipoli resistivi

1. Un **bipolo**  $B$  interessato da una corrente  $I$  e da una tensione  $V$  è **resistivo** se  $V$  ed  $I$  sono legati da una relazione finita

$$f(I, V)=0. \quad (\text{I.1})$$

Tale equazione definisce una linea nel piano  $(I, V)$  o equivalentemente nel piano  $(V, I)$  detta caratteristica.

2. Invertendo il senso in cui si misura la corrente  $I$  si definisce la corrente  $I'$

$$I=-I'. \quad (\text{I.2})$$

Sostituendo la (I.2) nella (I.1) si ha

$$f(-I', V)=0.$$

Dunque la caratteristica nel piano  $(I', V)$  o equivalentemente nel piano  $(V, I')$  è la linea simmetrica rispetto all'asse  $I$  della caratteristica nel piano  $(I, V)$  o equivalentemente nel piano  $(V, I)$  come mostrato in fig. I.1.

Analogamente invertendo il senso in cui si misura la tensione  $V$  si definisce la tensione  $V'$

$$V=-V'. \quad (\text{I.3})$$

Sostituendo la (I.3) nella (I.1) si ha

$$f(I, -V')=0.$$

Dunque la caratteristica nel piano  $(I, V')$  o equivalentemente nel piano  $(V', I)$  è la linea simmetrica rispetto all'asse  $V$  della caratteristica nel piano  $(I, V)$  o equivalentemente nel piano  $(V, I)$  come mostrato in fig. I.1.

A questo punto è chiaro che invertendo sia il senso in cui si misura la corrente  $I$  sia il senso in cui si misura la tensione  $V$  si ha

$$f(-I', -V')=0.$$

Dunque la caratteristica nel piano  $(I', V')$  o equivalentemente nel piano  $(V', I')$  è la linea simmetrica rispetto all'origine della caratteristica nel piano  $(I, V)$  o equivalentemente nel piano  $(V, I)$  come mostrato in fig. I.1.

3. Un bipolo resistivo si dice **controllato in corrente** se esso ammette una e una sola tensione  $V$  in corrispondenza ad ogni corrente  $I$ .  $V$  può allora esprimersi in funzione di  $I$  e si scrive

$$V=V(I).$$

Analogamente un bipolo si dice **controllato in tensione** se esso ammette una e una sola corrente  $I$  in corrispondenza ad ogni tensione  $V$ .  $I$  può allora esprimersi in funzione di  $V$  e si scrive

$$I=I(V).$$

4. Un bipolo resistivo è detto **affine** se la sua linea caratteristica è una linea retta.

Dunque un bipolo affine o è controllato in corrente o è controllato in tensione o è controllato sia in corrente che in tensione. Un bipolo resistivo affine controllato in corrente (fig. I.2) ha per caratteristica una retta non parallela all'asse  $V$  di equazione

$$V=RI+E \quad (I.4)$$

Analogamente un bipolo resistivo affine controllato in tensione (fig. I.3) ha per caratteristica una retta non parallela all'asse  $I$  di equazione

$$I=GV+A. \quad (I.5)$$

Dunque un bipolo resistivo affine controllato sia in corrente che in tensione ammette sia la rappresentazione controllata in corrente (I.4) sia la rappresentazione controllata in tensione (I.5).

Il passaggio dalla prima alla seconda avviene mediante le relazioni

$$G=1/R$$

$$A=-E/R$$

mentre il passaggio dalla seconda alla prima è dato dalle relazioni

$$R=1/G$$

$$E=-A/G.$$

## II. Soluzione del circuito elementare

Si connettano due bipoli resistivi  $B_1$  e  $B_2$  come mostrato in fig. II.1. In questo modo si è costituito il più semplice circuito concepibile detto **elementare**. Si assume che la corrente  $I_1$  e la tensione  $V_1$  di  $B_1$  siano misurate con la **convenzione dei generatori** e che la corrente  $I_2$  e la tensione  $V_2$  di  $B_2$  siano invece misurate con la **convenzione degli utilizzatori** come mostrato in fig. II.1.

La caratteristica di  $B_1$  è

$$f_1(I_1, V_1)=0.$$

e la caratteristica di  $B_2$  è

$$f_2(I_2, V_2)=0.$$

D'altra parte la legge di Kirchhoff delle correnti impone l'uguaglianza delle correnti

$$I_1=I_2=I$$

e la legge di Kirchhoff delle tensioni impone l'uguaglianza delle tensioni

$$V_1=V_2=V$$

Dunque la soluzione  $(I, V)$  del circuito ottenuto dalla connessione dei due bipoli è data dalla soluzione del sistema

$$f_1(I, V)=0$$

$$f_2(I, V)=0.$$

Le soluzioni di tale sistema corrispondono alle intersezioni delle caratteristiche dei due bipoli nel piano  $(I, V)$  o equivalentemente nel piano  $(V, I)$  come mostrato in fig. II.2.

Si noti che può non esistere alcuna intersezione. In questo caso il circuito elementare non ammette alcuna soluzione. Diversamente esistono una o più intersezioni corrispondenti a una o più soluzioni del circuito elementare.

### III. Connessione in serie di due bipoli resistivi

1. Due bipoli resistivi  $B_1$  e  $B_2$  connessi come mostrato in fig. III.1 si dicono **connessi in serie**. L'insieme dei due bipoli connessi in serie forma un nuovo bipolo. Assunte correnti e tensioni  $I_1$  e  $V_1$  per  $B_1$ ,  $I_2$  e  $V_2$  per  $B_2$  come mostrato in fig. III.1, la corrente e la tensione  $I_3$ ,  $V_3$  di  $B_3$  sono ottenute dalle leggi di Kirchhoff delle tensioni e delle correnti

$$\begin{aligned}V_3 &= V_1 + V_2 \\ I_3 &= I_1 = I_2.\end{aligned}$$

Essendo  $B_1$  resistivo di caratteristica  $f_1(I_1, V_1) = 0$  e  $B_2$  resistivo di caratteristica  $f_2(I_2, V_2) = 0$ , anche  $B_3$  è resistivo. Infatti ha una caratteristica  $f_3(I_3, V_3) = 0$  che si può determinare nel seguente modo: ad ogni corrente  $I_3$  la tensione  $V_3$ , se esiste, è data dalla somma di una possibile tensione  $V_1$  di  $B_1$  corrispondente alla corrente  $I_3$  e di una possibile tensione  $V_2$  di  $B_2$  corrispondente alla corrente  $I_3$ . Questa procedura si interpreta graficamente come mostrato in fig. III.2.

Si noti che può accadere che nessuna corrente di  $B_1$  sia anche corrente di  $B_2$ . In questo caso la connessione serie di  $B_1$  e  $B_2$  risulta impossibile.

2. Nel caso particolare in cui ciascuno dei bipoli resistivi  $B_1$  e  $B_2$  sia affine, anche  $B_3$  è affine, a condizione che la connessione sia possibile. Infatti due bipoli affini non controllati in corrente, non possono essere connessi in serie se hanno caratteristiche distinte, mentre possono essere connessi in serie se hanno la stessa caratteristica. In questo caso la caratteristica di  $B_3$  è la stessa di quelle di  $B_1$  e  $B_2$ .

La connessione serie di un bipolo affine controllato in corrente  $B_1$  e di un bipolo affine non controllato in corrente  $B_2$  è sempre possibile e la caratteristica di  $B_3$  coincide con quella del bipolo affine non controllato in corrente  $B_2$  come mostrato in fig. III.3. Se  $B_1$  e  $B_2$  sono entrambi controllati in corrente  $B_3$  è pure controllato in corrente e la caratteristica di  $B_3$  si ottiene sommando le caratteristiche di  $B_1$  e  $B_2$  a pari corrente come mostrato in fig. III.4. Quindi se  $B_1$  è affine e controllato in corrente ed ha caratteristica

$$V_1 = R_1 I_1 + E_1$$

e se  $B_2$  è affine e controllato in corrente ed ha caratteristica

$$V_2 = R_2 I_2 + E_2$$

allora  $B_3$  è affine e controllato in corrente ed ha caratteristica

$$V_3 = R_3 I_3 + E_3$$

in cui

$$R_3 = R_1 + R_2 \tag{III.1}$$

$$E_3 = E_1 + E_2 \tag{III.2}$$

Dunque la caratteristica dei due bipoli affini controllati in corrente connessi in serie è completamente determinata dai parametri  $R_3$  ed  $E_3$  e può determinarsi in base alle equazioni (III.1) e (III.2) senza ricorrere al metodo grafico.

3. La caratteristica

$$V_3 = R I_3 + E$$

di un bipolo affine controllato in corrente  $B_3$  è pari alla caratteristica della connessione serie di un resistore  $B_1$  di resistenza  $R$  avente caratteristica

$$V_1 = R I_1$$

e di un generatore indipendente  $B_2$  di tensione  $E$  avente caratteristica

$$V_2=E$$

come mostrato in figura fig. III.5.

#### IV. Connessione in parallelo di due bipoli resistivi

1. Due bipoli resistivi  $B_1$  e  $B_2$  connessi come mostrato in fig. IV.1 si dicono **connessi in parallelo**. L'insieme dei due bipoli connessi in parallelo forma un nuovo bipolo. Assunte correnti e tensioni  $I_1$  e  $V_1$  per  $B_1$ ,  $I_2$  e  $V_2$  per  $B_2$  come mostrato in fig. IV.1, la corrente e la tensione  $I_3$ ,  $V_3$  di  $B_3$  sono ottenute dalle leggi di Kirchhoff delle tensioni e delle correnti

$$\begin{aligned}V_3 &= V_1 + V_2 \\ I_3 &= I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Essendo  $B_1$  resistivo di caratteristica  $f_1(I_1, V_1)=0$  e  $B_2$  resistivo di caratteristica  $f_2(I_2, V_2)=0$ , anche  $B_3$  è resistivo. Infatti ha una caratteristica  $f_3(I_3, V_3)=0$  che si può determinare nel seguente modo: ad ogni tensione  $V_3$  la corrente  $I_3$ , se esiste, è data dalla somma di una possibile corrente  $I_1$  di  $B_1$  corrispondente alla tensione  $V_3$  e di una possibile corrente  $I_2$  di  $B_2$  corrispondente alla tensione  $V_3$ . Questa procedura si interpreta graficamente come mostrato in fig. IV.2.

Si noti che può accadere che nessuna tensione di  $B_1$  sia anche tensione di  $B_2$ . In questo caso la connessione parallelo di  $B_1$  e  $B_2$  risulta impossibile.

2. Nel caso particolare in cui ciascuno dei bipoli resistivi  $B_1$  e  $B_2$  sia affine, anche  $B_3$  è affine, a condizione che la connessione sia possibile. Infatti due bipoli affini non controllati in tensione, non possono essere connessi in parallelo se hanno caratteristiche distinte, mentre possono essere connessi in parallelo se hanno la stessa caratteristica. In questo caso la caratteristica di  $B_3$  è la stessa di quelle di  $B_1$  e  $B_2$ .

La connessione parallela di un bipolo affine controllato in tensione  $B_1$  e di un bipolo affine non controllato in tensione  $B_2$  è sempre possibile e la caratteristica di  $B_3$  coincide con quella del bipolo affine non controllato in tensione  $B_2$  come mostrato in fig. IV.3. Se  $B_1$  e  $B_2$  sono entrambi controllati in tensione  $B_3$  è pure controllato in tensione e la caratteristica di  $B_3$  si ottiene sommando le caratteristiche di  $B_1$  e  $B_2$  a pari tensione come mostrato in fig. IV.4. Quindi se  $B_1$  è affine e controllato in tensione ed ha caratteristica

$$I_1 = G_1 V_1 + A_1$$

e se  $B_2$  è affine e controllato in tensione ed ha caratteristica

$$I_2 = G_2 V_2 + A_2$$

allora  $B_3$  è affine e controllato in tensione ed ha caratteristica

$$I_3 = G_3 V_3 + A_3$$

in cui

$$G_3 = G_1 + G_2 \tag{IV.1}$$

$$A_3 = A_1 + A_2 \tag{IV.2}$$

Dunque la caratteristica dei due bipoli affini controllati in tensione connessi in parallelo è completamente determinata dai parametri  $G_3$  e  $A_3$  e può determinarsi in base alle equazioni (IV.1) e (IV.2) senza ricorrere al metodo grafico.

3. La caratteristica

$$I_3 = GI_3 + A$$

di un bipolo affine controllato in tensione  $B_3$  è pari alla caratteristica della connessione parallelo di un resistore  $B_1$  di conduttanza  $G$  avente caratteristica

$$I_1 = GV_1$$

e di un generatore indipendente  $B_2$  di corrente  $A$  avente caratteristica

$$I_2 = A$$

come mostrato in figura fig. IV.5.

## V. Bipoli ottenuti connettendo bipoli in serie e in parallelo

1. Connettendo in serie o in parallelo due bipoli  $B_1$  e  $B_2$  si ottiene dunque un nuovo bipolo. A questo punto connettendo il bipolo così ottenuto, che diciamo  $B_1'$ , con un nuovo bipolo  $B_3$ , si ottiene un nuovo bipolo  $B_2'$  (fig. V.1). Questa procedura può continuare ottenendo in  $n$  passi un bipolo  $B_n'$ . Se gli  $n+1$  bipoli  $B_1, \dots, B_{n+1}$  sono resistivi, anche i bipoli  $B_1', \dots, B_n'$  sono resistivi e la loro caratteristica si ottiene componendo le caratteristiche come descritto sopra. E' chiaro che questa procedura è impossibile se impossibile è realizzare una delle operazioni di connessione in serie o in parallelo.

2. La connessione serie-parallelo di bipoli affini è a sua volta un bipolo affine.

È chiaro per quanto detto sopra che il metodo grafico in questo caso può evitarsi considerando solo i parametri  $R$  ed  $E$  dei bipoli affini controllati in corrente, e i parametri  $G$  ed  $A$  dei bipoli controllati in tensione come mostrato nell'esempio di figura V.2.

## VI. Risoluzione di circuiti di bipoli connessi in serie e parallelo

Si consideri un circuito elementare costituito da due bipoli resistivi  $B_1$  e  $B_2$ . Tale circuito può essere risolto come indicato al paragrafo II. A questo scopo occorre conoscere le due caratteristiche di  $B_1$  e  $B_2$ . Dunque se  $B_1$  e  $B_2$  sono ottenuti da una o più connessioni in serie o in parallelo di bipoli resistivi tali caratteristiche possono essere ottenute come indicato al paragrafo V. Si veda l'esempio di fig. VI.1.

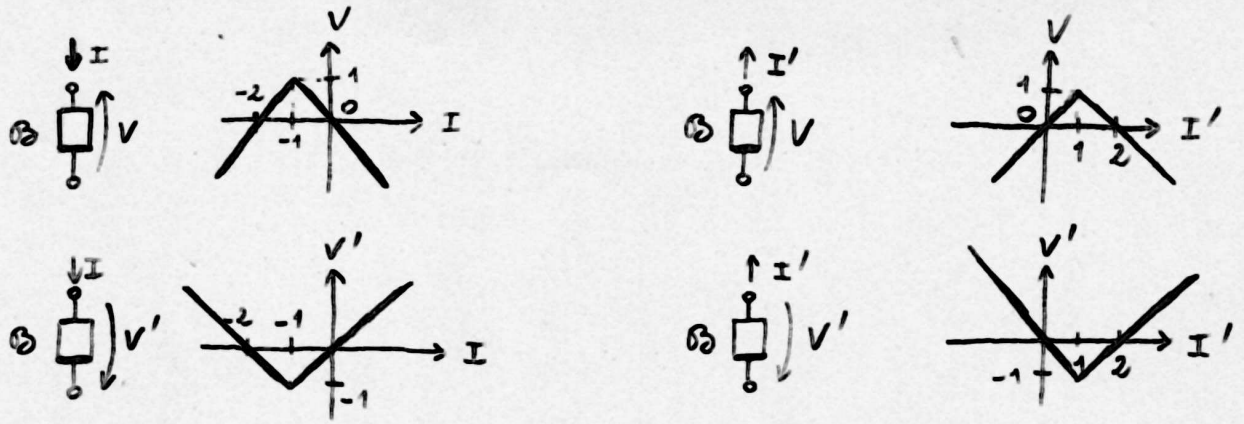
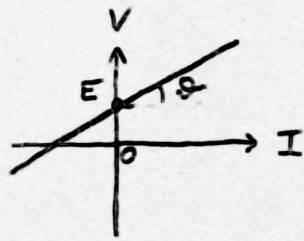
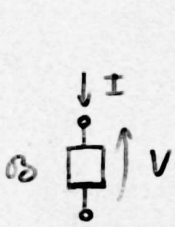


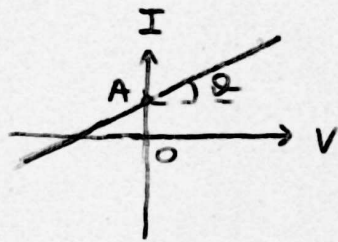
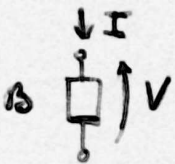
Fig. I.1



$$r_{g\mathcal{S}} = R$$

$$V = RI + E$$

Fig. I.2



$$r_{g\mathcal{S}} = G$$

$$I = GV + A$$

Fig. I.3

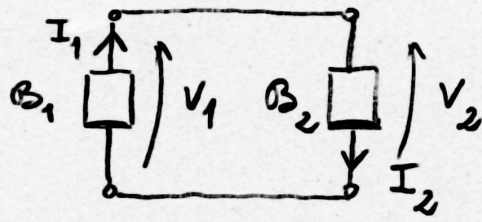


Fig. II.1

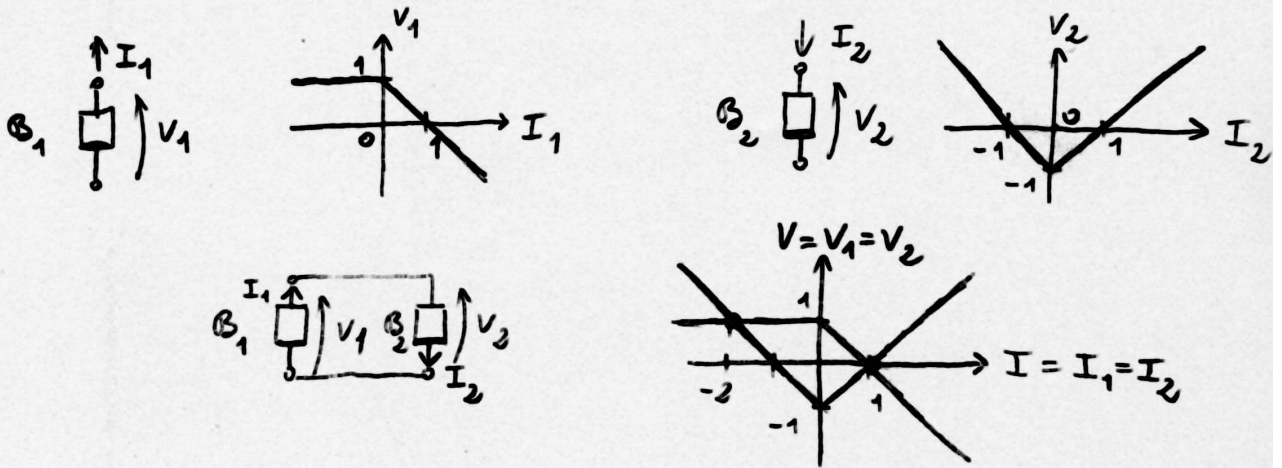


Fig. II.2

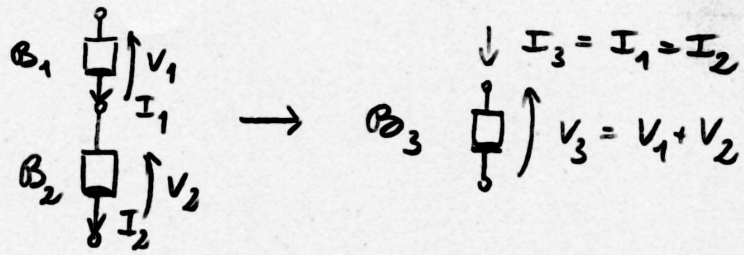


Fig. III. 1

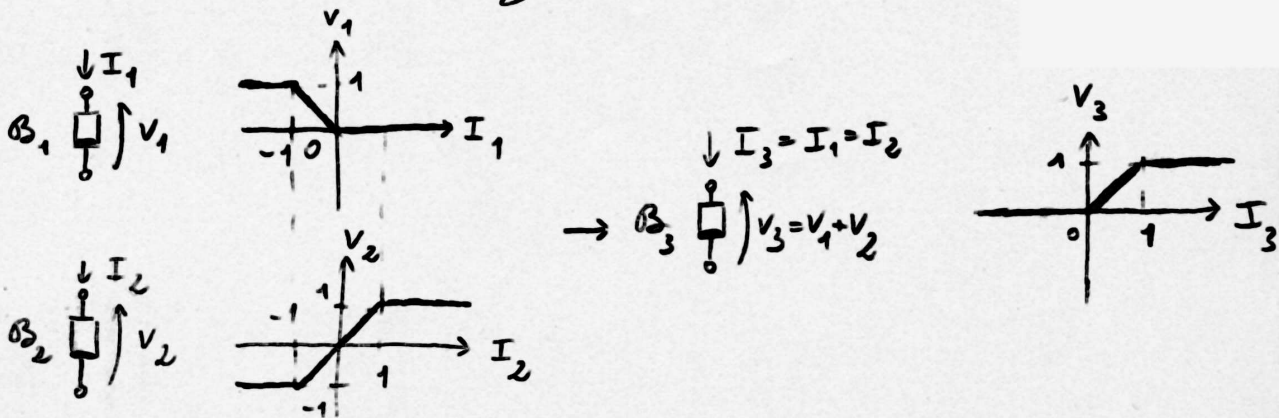


Fig III. 2

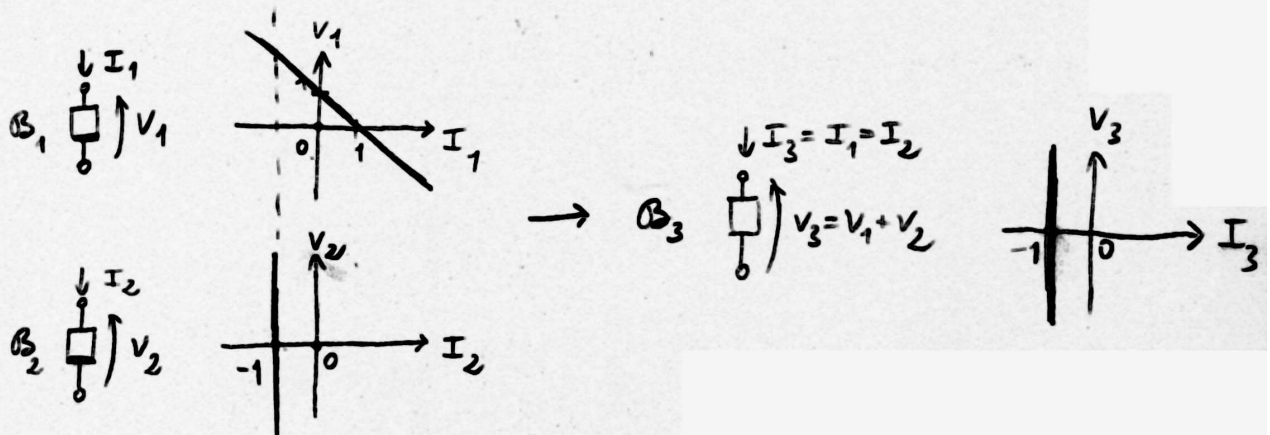
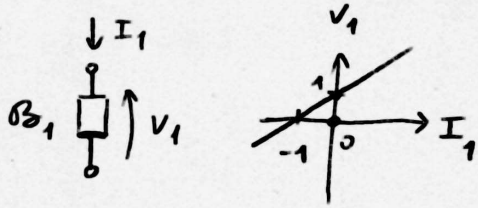
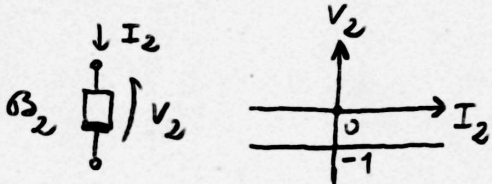


Fig III. 3

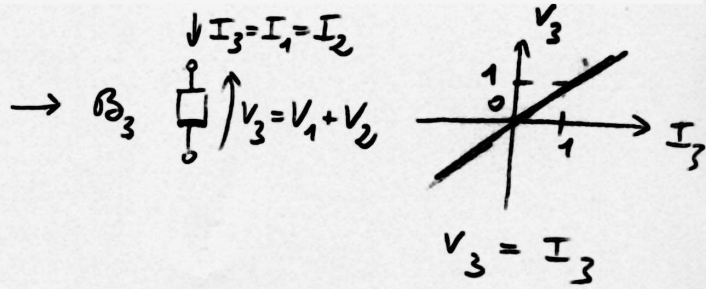




$$V_1 = I_1 + 1$$

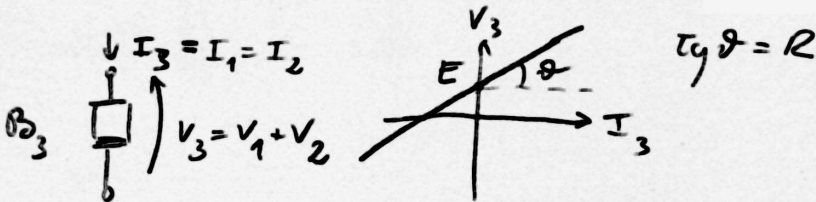


$$V_2 = -1$$



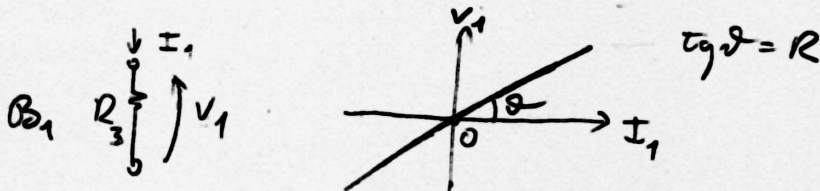
$$V_3 = I_3$$

Fig. III.4



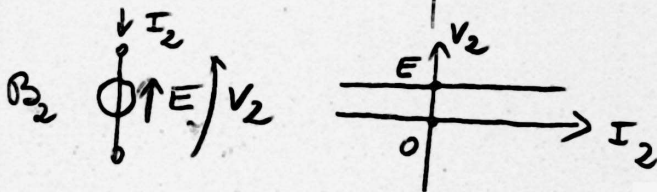
$$\tan \theta = R$$

$$V_3 = R I_3 + E$$



$$\tan \theta = R$$

$$V_1 = R I_1$$



$$V_2 = E$$

Fig. III.5

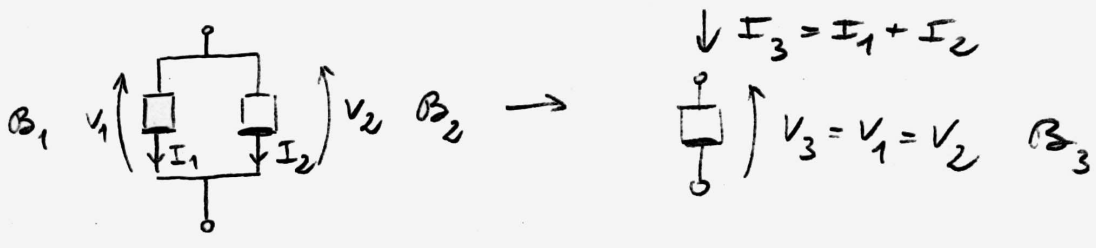


Fig. IV.1

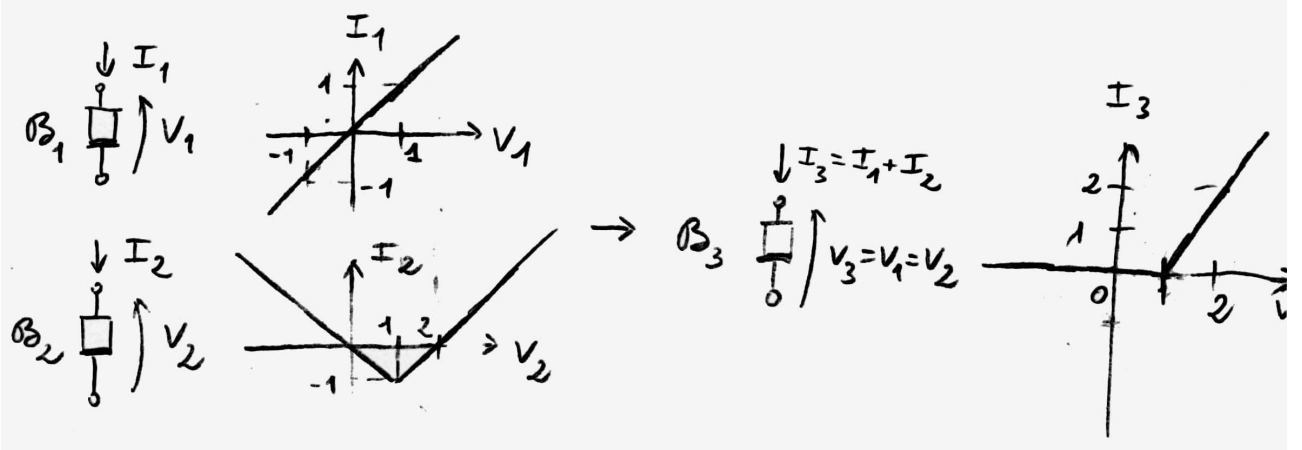


Fig. IV.2

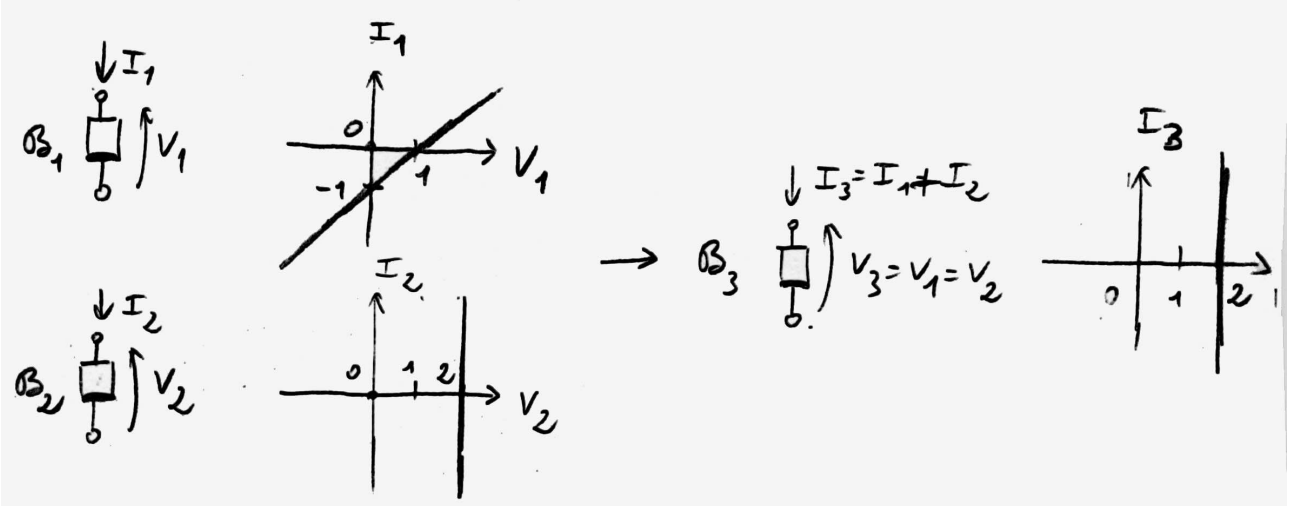


Fig. IV.3

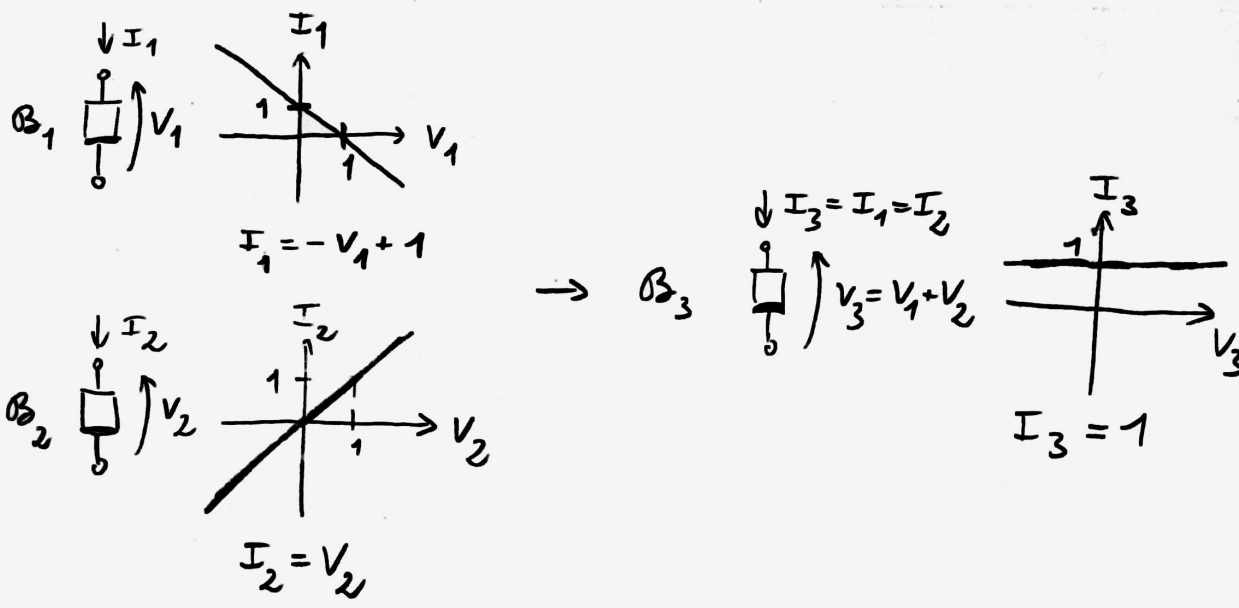


Fig. IV.4

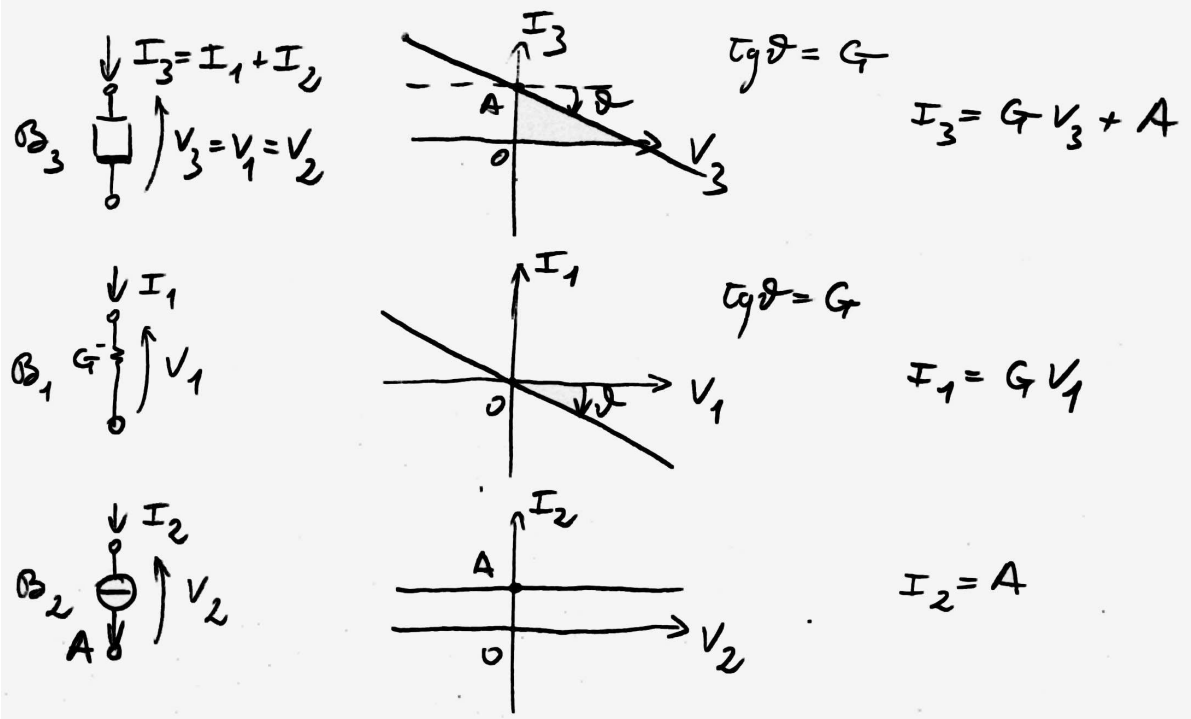


Fig. IV.5

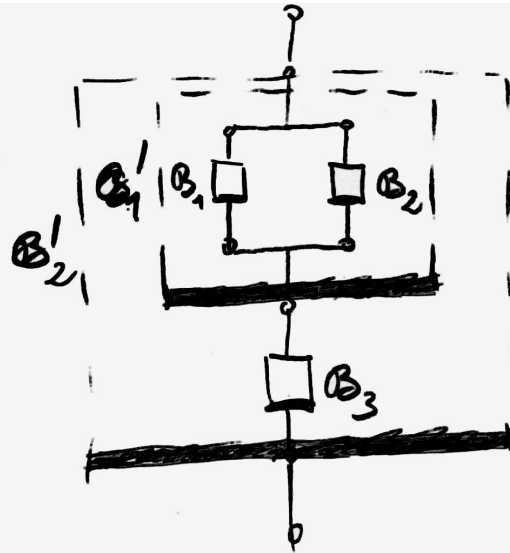


Fig. V.1

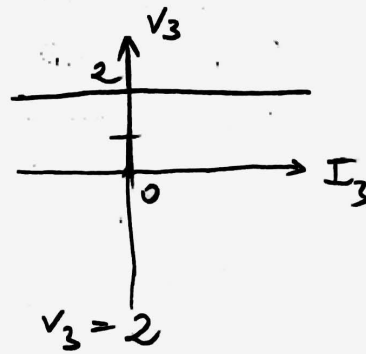
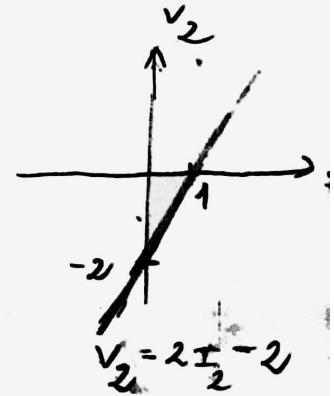
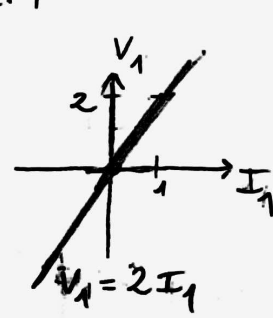
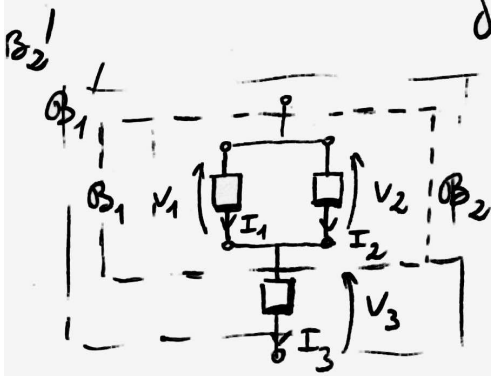


Fig V.2 (continued)

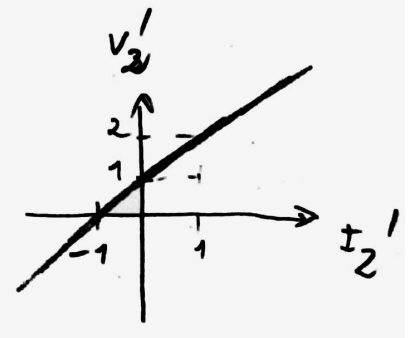
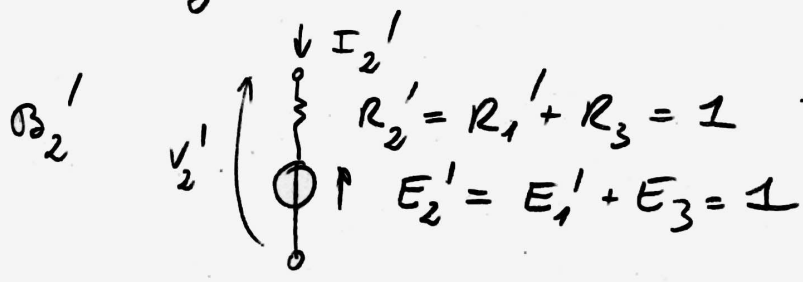
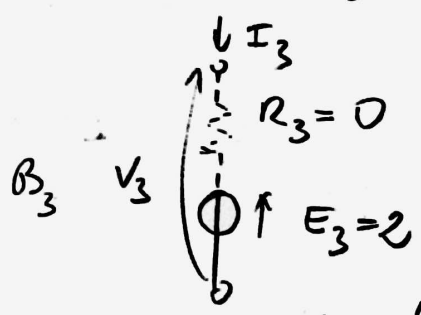
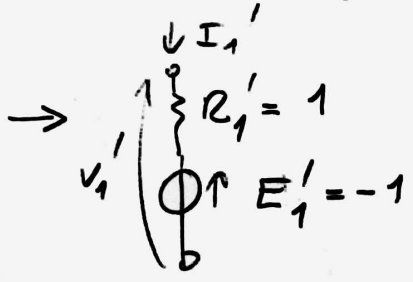
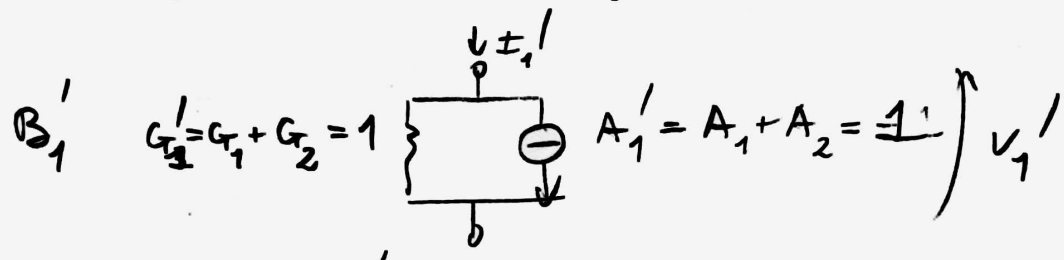
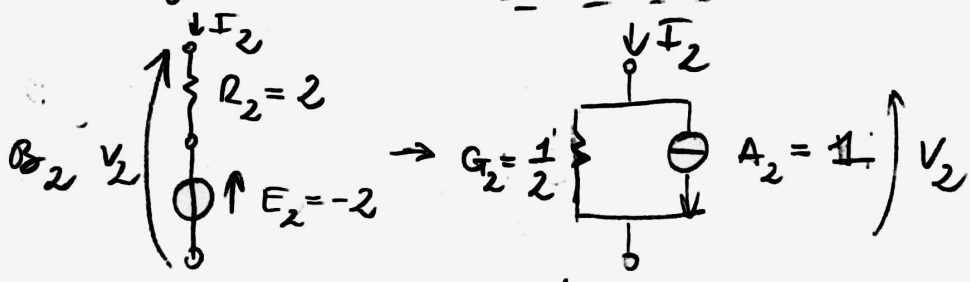
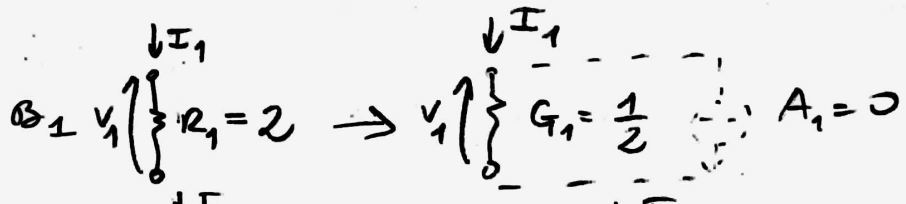
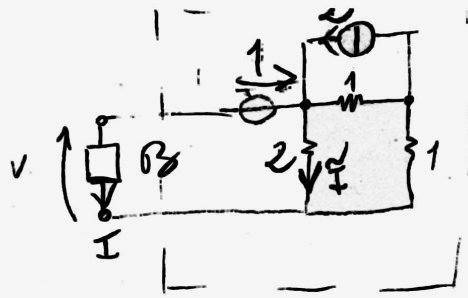


Fig. IV.2



Nella Figura a fianco dei resistori sono riportati i valori delle resistenze espresse in Ohm ( $\Omega$ ).

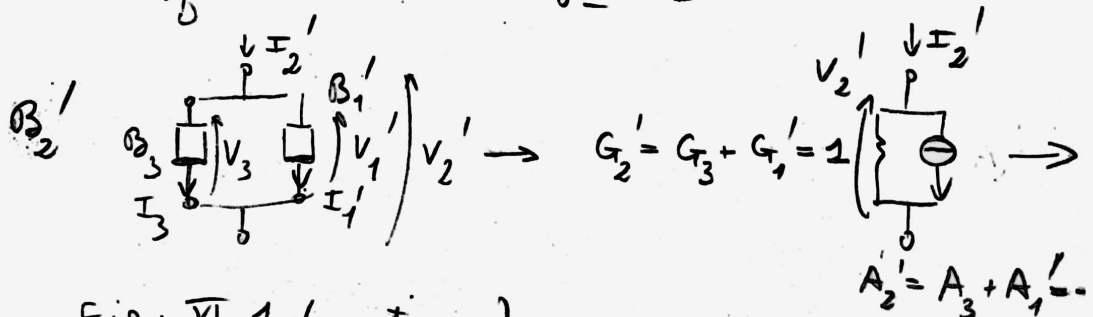
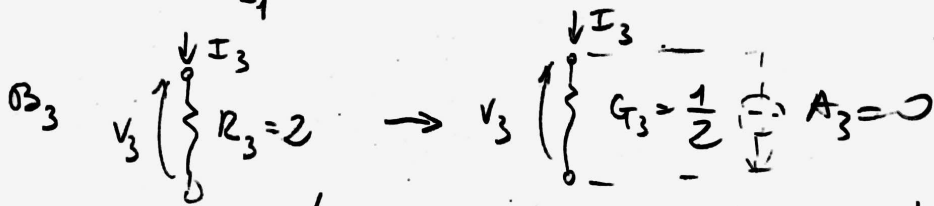
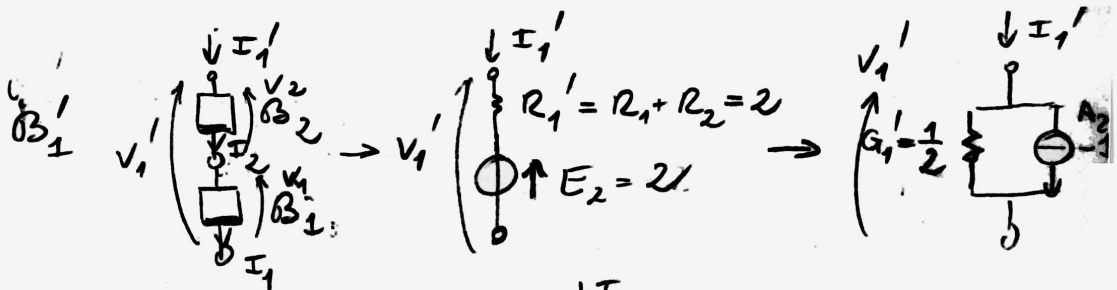
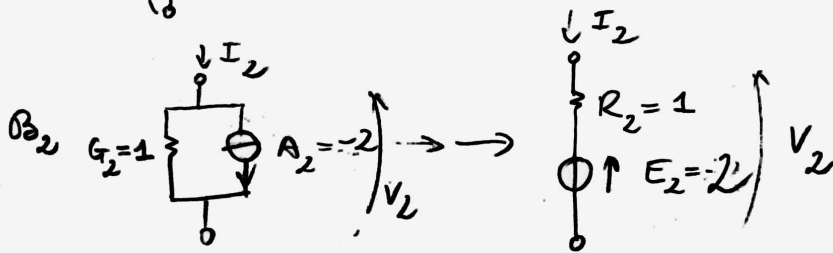
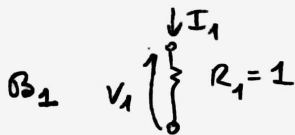
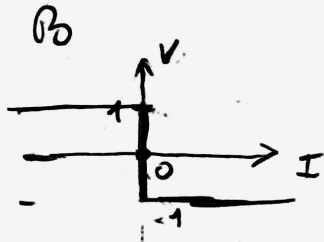
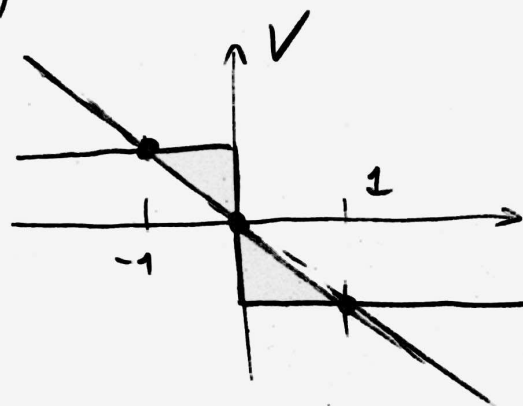
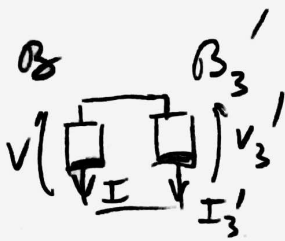
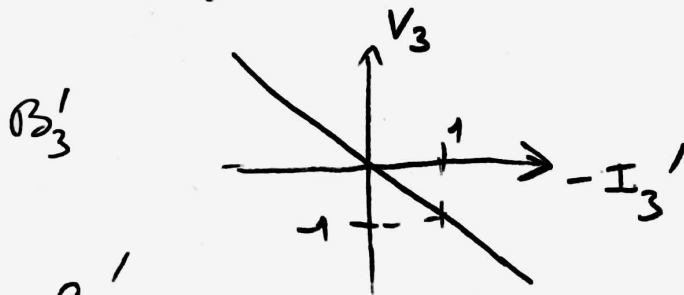
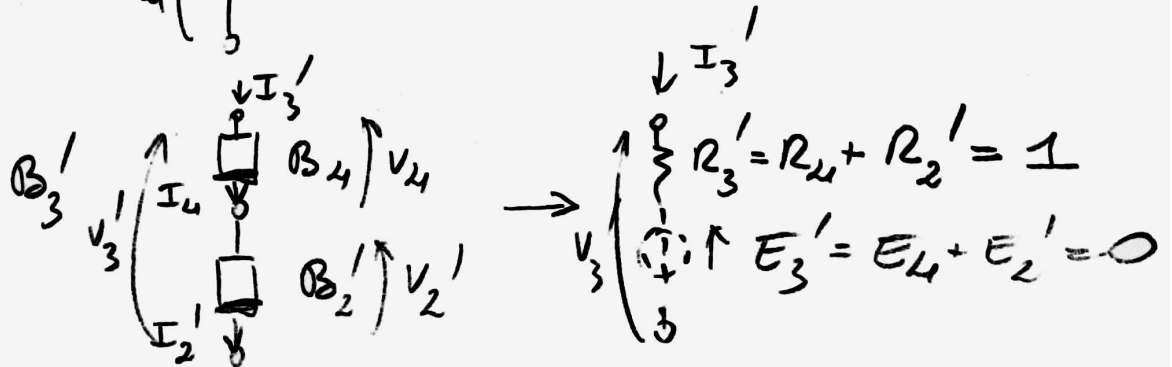
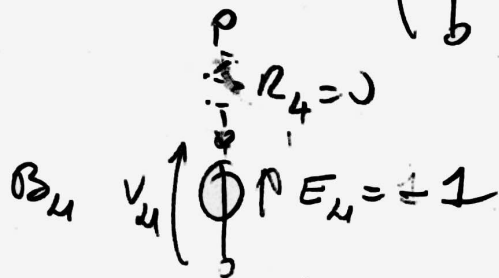
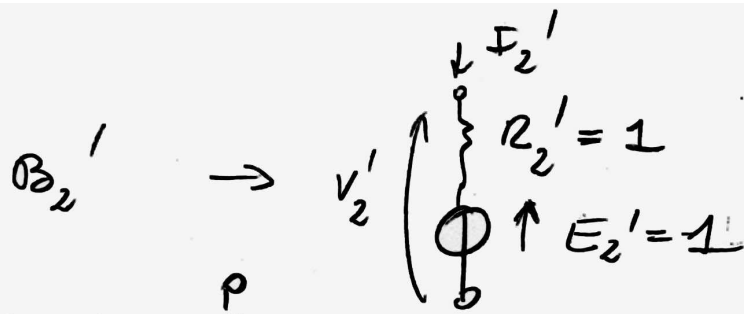


Fig. VI.1 (continua)



3 Solutions:

$(I, v) = (-1, 1)$

$(I, v) = (0, 0)$

$(I, v) = (1, -1)$

Fig. VI.1