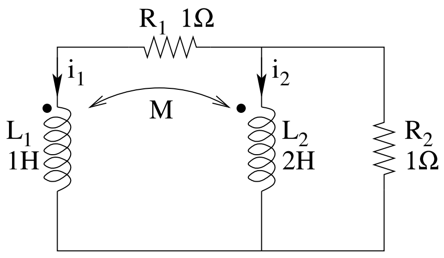
0.1 Rete del secondo ordine con induttori mutuamente accoppiati

0.1.1 Testo



Considerata la rete in figura, con

- $M = 1H$
- $L_1 = 1H$
- $L_2 = 1H$

1. Si scrivano le equazioni di stato della rete.
2. Si calcolino $i_1(t)$ ed $i_2(t)$ assumendo che

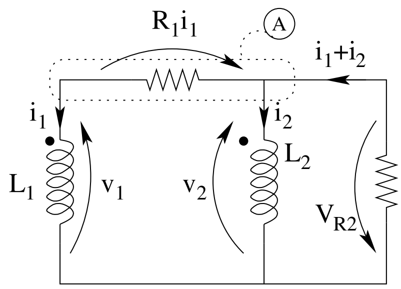
- $i_1(0) = 2A$
- $i_2(0) = -1A$

0.1.2 Soluzione

Iniziamo con lo scrivere le equazioni di stato.

Per scrivere le equazioni di stato, dobbiamo scrivere le duali delle variabili di stato in funzione delle variabili di stato, ovvero andremo a scrivere v_1 e v_2 in funzione di i_1 e i_2.

Indichiamo innanzitutto in figura v_1 e v_2.



Con una LKI al taglio A otteniamo la corrente passante in R_2

$$i_{R2} = i_1 + i_2$$

Utilizzando la legge di Ohm troviamo la tensione ai capi di R_2

$$v_{R2} = R_2(i_1 + i_2)$$

da cui,

$$v_2 = -v_{R2} = -R_2 i_1 - R_2 i_2$$

Con una LKV alla maglia di sinistra otteniamo

$$v_1 = v_2 - R_1 i_1 \Rightarrow v_1 = -R_1 i_1 + [-R_2 i_1 - R_2 i_2] = (-R_1 - R_2)\, i_1 + (-R_2)\, i_2$$

Sostituendo i valori di resistenza e scrivendola in forma matriciale abbiamo

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Le relazioni costitutive degli induttori mutuamente accoppiati ci danno:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i_1} \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i_1} \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Uguagliando i due secondi membri otteniamo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i_1} \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Per avere le equazioni di stato dobbiamo esplicitare il vettore delle derivate delle correnti, ovvero moltiplichiamo entrambi i membri per la matrice inversa dei coefficienti delle derivate.

La matrice inversa è:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

quindi per ottenere l'equazione di stato:

$$\begin{bmatrix} \dot{i_1} \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{i_1} \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+1 & -2+1 \\ 2-1 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i_1} \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

oppure, in forma algebrica:

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} & = & i_1 - 2i_2 \\ \frac{di_2}{dt} & = & -i_1 \end{cases}$$

Risolviamo ora il sistema:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Valori iniziali (dati dal testo del problema):
$i_1(0) = 2$
$i_2(0) = -1$
Valori asintotici: sostituendo agli induttori due corto circuiti otteniamo immediatamente:
$i_{1\infty} = 0$
$i_{2\infty} = 0$
La traccia della matrice di stato è: $T = a_{11} + a_{22} = -3$
Il determinante della matrice di stato è: $\Delta = 1$
Essendo $T < 0$ e $\Delta > 0$: Il sistema è stabile
Il coefficiente di smorzamento è:
$\alpha = -\frac{1}{2}T = 1,5$

$\omega_0^2 = \Delta = 1$
L'equazione caratteristica è:

$$S^2 + 2\alpha S + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow S^2 + 3S + 1 = 0$$

La quale ha come soluzioni (frequenze naturali)

$$S = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \Rightarrow S = \begin{cases} -0,381966 \\ -2,618034 \end{cases}$$

Avendo come soluzione delle radici reali, negative e distinte la soluzione sara' del tipo:

$$x\,(t) = A_1 e^{S_1 t} + A_2 e^{S_2 t} + x_\infty$$

In particolare otteniamo

$$\begin{cases} i_1(t) = & A_1 e^{S_1 t} + A_2 e^{S_2 t} + i_{1\infty} \\ i_2(t) = & A_3 e^{S_1 t} + A_4 e^{S_2 t} + i_{2\infty} \end{cases}$$

Calcoliamo ora i coefficienti della soluzione.
Valutiamo tali espressioni per $t = 0$, sostituendo i valori iniziali e quelli asintotici, ottenendo:

$$i_1(0) = A_1 \cdot e^0 + A_2 e^0 + i_{1\infty} \Rightarrow 2 = A_1 + A_2 + 0$$

$$i_2(0) = A_3 \cdot e^0 + A_4 e^0 + i_{2\infty} \Rightarrow -1 = A_3 + A_4 + 0$$

Derivando le soluzioni in t=0 otteniamo:

$$\frac{d}{dt} i_1(t) = S_1 A_1 e^{S_1 t} + S_2 A_2 e^{S_2 t}$$

$$\frac{d}{dt} i_2(t) = S_1 A_3 e^{S_1 t} + S_2 A_4 e^{S_2 t}$$

Inoltre i valori delle derivate in $t = 0$ sono calcolabili dalle equazioni di stato

$$\left.\frac{d}{dt} i_1(t)\right|_{t=0} = -5$$

$$\left.\frac{d}{dt} i_2(t)\right|_{t=0} = -1$$

in particolare, sostituendo:

$$\left.\frac{d}{dt} i_1(t)\right|_{t=0} = S_1 A_1 + S_2 A_2 \Rightarrow -5 = -0,381966 A_1 - 2,618034 A_2$$

Riordinando i termini

$$0,381966 \cdot A_1 + 2,618034 \cdot A_2 = -5$$

Ponendo a sistema con l'equazione precedente

$$\begin{cases} A_1 & + & A_2 & = & 2 \\ 0,381966 \cdot A_1 & + & 2,618034 \cdot A_2 & = & 5 \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per 0,381966 otteniamo:

$$\begin{cases} 0,381966 \cdot A_1 & + & 0,381966 \cdot A_2 & = & 0,763932 \\ 0,381966 \cdot A_1 & + & 2,618034 \cdot A_2 & = & 5 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro la seconda equazione dalla prima:

$$0 + 2,236068 \cdot A_2 = 4,236068 \Rightarrow A_2 = 1,894427$$

Sostituendo il valore trovato nella prima:

$$A_1 + A_2 = 2$$

$$A_1 + A_2 = 2 \Rightarrow A_1 = 2 - A_2 \Rightarrow A_1 = 2 - 1,894427$$

$$A_1 = 0,105573$$

Analogamente, per A_3 ed A_4 otteniamo:

$$\left.\frac{d}{dt} i_2(t)\right|_{t=0} = S_1 A_3 + S_2 A_4 \Rightarrow -1 = -0,381966 A_3 - 2,618034 A_4$$

Riordinando i termini:

$$0,381966 \cdot A_3 + 2,618034 \cdot A_4 = -1$$

Ponendo a sistema, abbiamo:

$$\begin{cases} A_3 & + & A_4 & = & -1 \\ 0,381966 \cdot A_3 & + & 2,618034 \cdot A_4 & = & 1 \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per -0,381966

$$\begin{cases} 0,381966 \cdot A_3 & + & 0,381966 \cdot A_4 & = & -0,381966 \\ 0,381966 \cdot A_3 & + & 2,618034 \cdot A_4 & = & 1 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro la seconda equazione dalla prima:

$$0 + 2,236068 \cdot A_4 = 1,381966 \Rightarrow A_4 = 0,618034$$

Sostituendo il valore trovato nella prima:

$$A_3 + A_4 = -1$$

$$A_3 + A_4 = -1 \Rightarrow A_3 = -1 - A_4 \Rightarrow A_3 = -1 - 0,618034$$

$$A_3 = -1,618034$$

Sostituendo i valori trovati otteniamo la soluzione completa:

$$\begin{cases} i_1(t) = & 0,105573 e^{-0,381966t} + 1,894427 e^{-2,618034t} + 0 \\ i_2(t) = & -1,618034 e^{-0,381966t} + 0,618034 e^{-2,618034t} + 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} i_1(t) = & 0,106 e^{-0,38t} + 1,89 e^{-2,6t} \\ i_2(t) = & -1,62 e^{-0,38t} + 0,62 e^{-2,6t} \end{cases}}$$