Elettrotecnica
Soluzioni della
II Prova Intermedia.I del 9-07-2017
corso del prof. Dario D'Amore

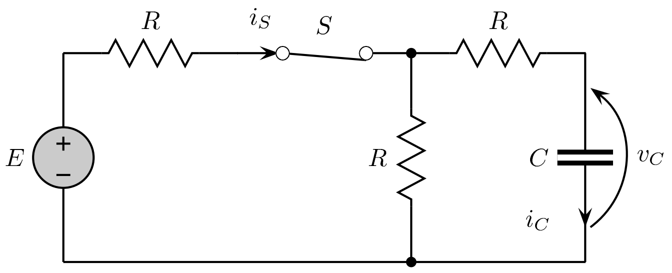
Autore: Dino Ghilardi

21 febbraio 2017

1.1 E1 II P.I. del 9-02-2017, prof. Dario D'Amore

1.1.1 Testo

E1



L'interruttore S, chiuso da molto tempo, si apre all'istante $t_0 = 0$ per poi richiudersi all'istante $t_1 = 2$ [ms].
Sapendo che:
$C = 500$ [μF], $R = 2$ [Ω], $E = 20$ [V]
Determinare:

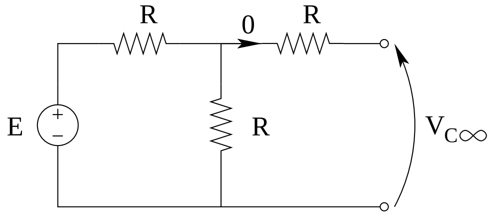
- l'espressione analitica di v_C e di i_C per $t > t_0$
- l'espressione analitica di i_S per $t > t_0$
- Il grafico qualitativo di v_C i_C ed i_S per $t > t_0$
- il minimo valore assunto dall'energia accumulata dal condensatore durante l'intero transitorio.

1.1.2 Soluzione

Iniziamo con l'analizzare il transitorio $t_0 \to t_1$, ovvero il transitorio di APERTURA dell'interruttore.

Calcoliamo il valore iniziale della tensione sul condensatore come valore asintotico del transitorio di chiusura. Infatti essendo la tensione sul condensatore la variabile di stato, questa sarà continua quindi il valore 'iniziale' di un qualsiasi transitorio sarà pari al valore 'finale' del transitorio precedente. Nel nostro caso particolare il valore "finale" del transitorio precedente (di chiusura) sarà pari al suo valore asintotico, dato che l'interruttore è rimasto chiuso per un tempo molto maggiore della costante di tempo prima di aprirsi.

Sostituiamo quindi (ad interruttore chiuso) il condensatore con un circuito aperto ottenendo



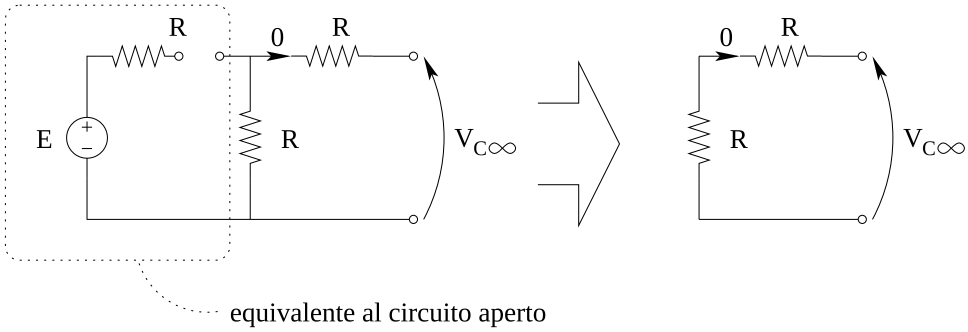
Dalla figura osserviamo che con un partitore di tensione si ottiene

$$V_{C\infty CHIUSURA} = E\frac{R}{R+R} = \frac{E}{2} = 10\,V$$

Tale valore sarà pari al valore iniziale del transitorio di apertura per $t_0 \geq 0$

$$V_{C0APERTURA} = V_{C\infty CHIUSURA} = 10\,V$$

Calcoliamo ora il valore asintotico di $v_C(t)$ del transitorio di apertura



Ad interruttore aperto la serie del generatore di tensione, del resistore di sinistra e dell'interruttore sono equivalenti ad un circuito aperto, quindi otteniamo

$$V_{C\infty APERTURA} = 0$$

Calcoliamo ora la costante di tempo del transitorio.

Ad interruttore aperto la resistenza equivalente è pari a 2R, quindi

$$\tau = R_{eq}C = 2 \cdot 2\Omega \cdot 500\mu F = 2\,ms$$

L'espressione analitica di $v_C(t)$ sarà quindi

$$v_C(t) = 0 + (10-0)\,e^{-\frac{t}{2ms}}\,[V] \Rightarrow \boxed{v_C(t) = 10e^{-\frac{t}{2ms}}\,[V]\,per\,0 \le t \le 2ms}$$

Il valore di $i_C(t)$ può essere ottenuto dalla relazione costitutiva del condensatore.

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = 0.5\cancel{m}F \cdot 10\left(-\frac{1}{2\cancel{m}s}\right)e^{-\frac{t}{2ms}} \Rightarrow \boxed{i_C(t) = -\frac{5}{2}e^{-\frac{t}{2ms}} = -2.5e^{-\frac{t}{2ms}}\,[A]}$$

Analizziamo ora il transitorio per $t \ge t_1$.

Per quanto riguarda la variabile di stato (v_C) il valore iniziale in questo transitorio sarà uguale al valore "finale" del transitorio precedente, cioè il valore raggiunto all'istante t_1.

Otteniamo quindi

$$V_{C0CHIUSURA} = v_C(2ms) = 10e^{-1} = \frac{10}{e} = 3,678794412...\,V$$

Il valore asintotico sul transitorio di chiusura è già stato calcolato in precedenza

La costante di tempo sul transitorio di chiusura vale

$$\tau_{chiusura} = R_{eq}C = \frac{3}{2}RC = \frac{3}{\cancel{2}}\cancel{2}\Omega \cdot 0.5mF \Rightarrow \tau = 1.5\,ms$$

Otteniamo quindi

$$v_C(t) = 10 + (3.68... - 10)e^{\frac{t-2ms}{1.5ms}} = 10-(6.32120...)e^{\frac{t-2ms}{1.5ms}} \Rightarrow \boxed{v_C(t) \simeq 10-(6.32)e^{\frac{t-2ms}{1.5ms}}\;per\,t{\ge}2\,\mathrm{ms}}$$

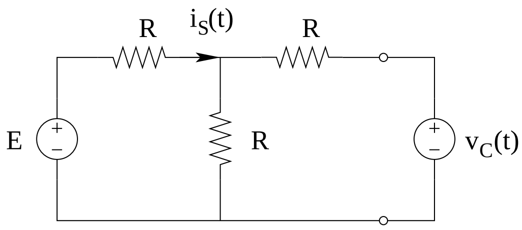
La corrente i_C sarà quindi

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = 0.5\cancel{m}F\,(-6.32...)\left(-\frac{1}{1.5\cancel{m}s}\right)e^{-\frac{t-2ms}{1.5ms}} = \frac{5e-5}{1.5e}e^{-\frac{t-2ms}{1.5ms}} \Rightarrow 2,107068529...e^{-\frac{t-2ms}{1.5ms}}$$

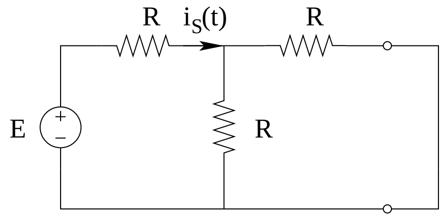
$$\boxed{i_C(t) \simeq 2.1e^{-\frac{t-2ms}{1.5ms}}\,A\,per\,t > 2ms}$$

Espressione analitica di $i_S(t)$. Ad interrutore aperto $i_S(t)$ è identicamente uguale a zero.

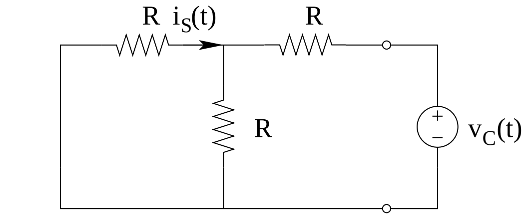
Ad interruttore chiuso possiamo scrivere $i_S(t)$ in funzione della variabile di stato, ottenendo:



Effetto di E:



Effetto di $v_C(t)$



Possiamo utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti. L'effetto del generatore E sarà:

$$i'_S(t) = \frac{E}{R + R/2} = \frac{E}{\frac{3}{2}R} = \frac{2}{3}\frac{E}{R} = \frac{\cancel{2}}{3}\frac{20\,V}{\cancel{2}\,\Omega} = \frac{20}{3\Omega}\,A$$

L'effetto del generatore "di variabile di stato" $v_C(t)$ sarà:

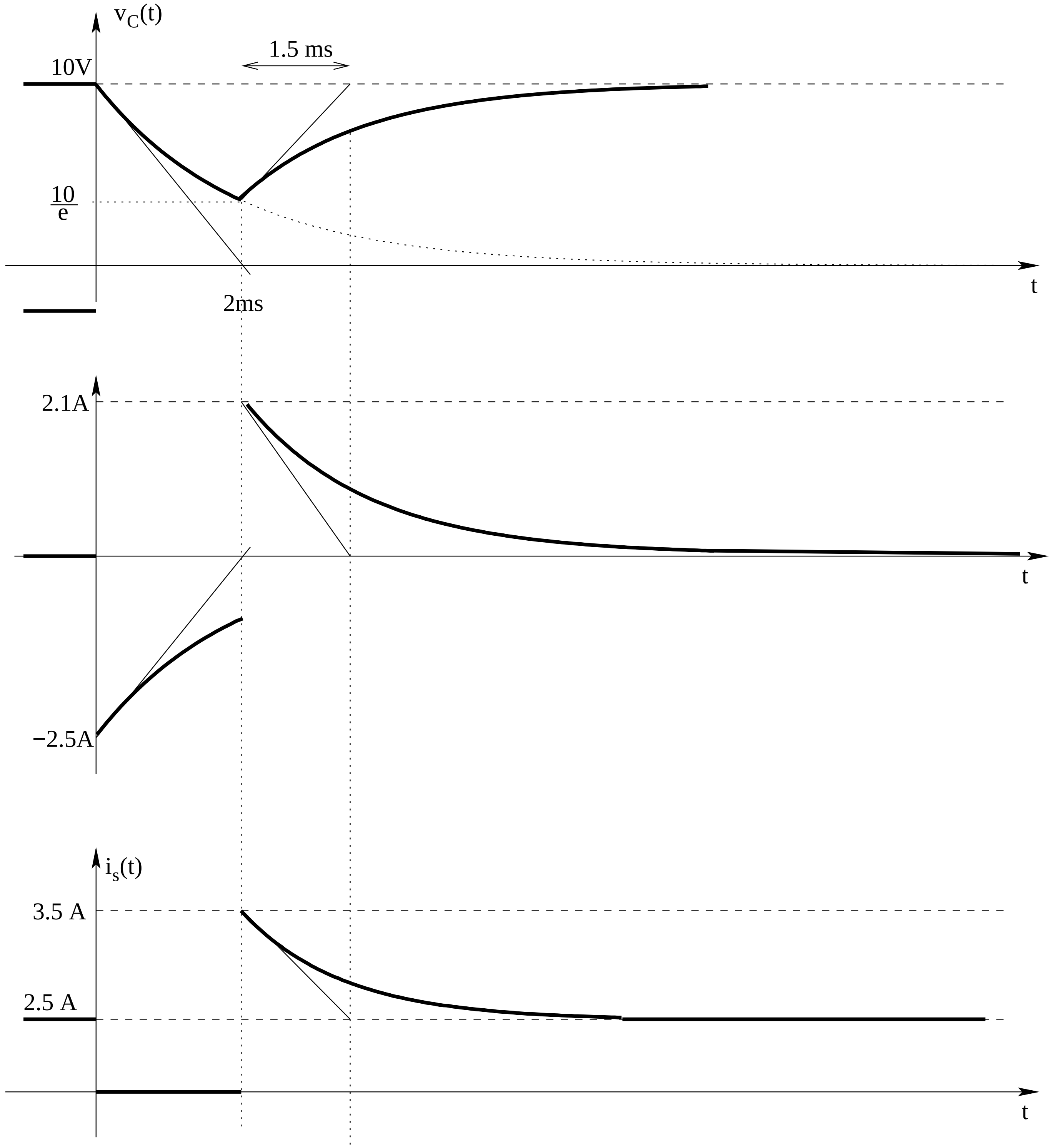
$$i''_S(t) = -\underbrace{\frac{v_C(t)}{R + R/2}}_{L.\,di\,Ohm} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{partitore\,di\,corrente} = -v_C(t) \cdot \frac{\cancel{2}}{3R}\frac{1}{\cancel{2}} = -\frac{v_C(t)}{6\Omega}$$

Otteniamo quindi, per $t > 2ms$

$$i_S(t) = \frac{20}{3} - \frac{10-(6.32)e^{\frac{t-2ms}{1.5ms}}}{6} = \frac{30}{6} + \frac{(6.32)e^{\frac{t-2ms}{1.5ms}}}{6} = 5 + 1.05e^{\frac{t-2ms}{1.5ms}}$$

$$\boxed{i_s(t) = 5 + e^{-\frac{t-2ms}{1.5ms}}\;A}$$

Grafici



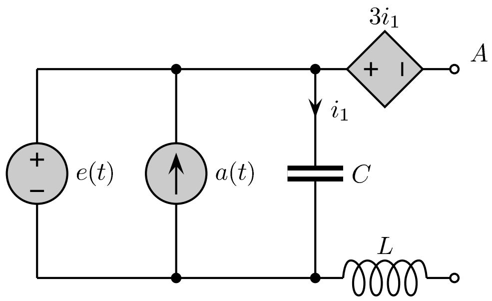
Valore minimo dell'energia nel condensatore

$$E_C = \frac{1}{2}CV_C^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 0.5mF \cdot (\frac{10}{e}V)^2 \Rightarrow \boxed{E_{Cmin} = 3,383382081...\,mJ \simeq 3,4\,mJ}$$

1.2 E2 II P.I. del 9-02-2017, prof. Dario D'Amore

1.2.1 Testo

E2



Il circuito di figura opera in regime sinusoidale Sapendo che:
$e(t) = 10\cos(1000t)$ [V]
$a(t) = 4\sqrt{2}\cos(1000t + \pi/4)$ [A]
$C = 1$ [mF], $L = 2$ [mH]
Determinare:

- Il circuito equivalente di Thevenin ai morsetti AB
- la potenza complessa assorbita dal generatore di corrente.

1.2.2 Soluzione sintetica

Passiamo innanzitutto al dominio dei fasori, calcolando l'impedenza di condensatore ed induttore.

$$z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{1000 \cdot 10^{-3}} = -j\,\Omega$$

$$z_L = j\omega L = j \cdot 1000 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = j2$$

$$\overline{E} = 10e^{j0}\,V$$

$$\overline{A} = 4\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

Equivalente Thevenin. Iniziamo con il calcolare la tensione a morsetti aperti.

In tali condizioni calcoliamo la pilotante che sarà pari a:
per quanto riguarda il generatore di corrente otteniamo

$$\overline{I_1} = \frac{\overline{E}}{z_C} = \frac{10\,V}{-j\,\Omega} = j10\,A$$

Nota la pilotante siamo in grado di calcolare il circuito equivalente ai morsetti AD (con il morsetto D alla sinistra dell'induttore) che sarà pari ad un generatore di tensione del valore di

$$\overline{V_{eqAD}} = \overline{E} - (3\Omega)\,\overline{I_1} = 10 - j30\,[V]$$

Essendo in queste condizioni l'induttore attraversato da corrente nulla, sarà nulla anche la tensione ai suoi capi.

Ponenedo in serie l'equivalente appena calcolato con l'induttore otteniamo l'equivalente thevenin cercato.

$$\overline{V_{eq}} = \overline{V_{eqAD}} + \overline{V_L} = 10 - j30 + 0 \Rightarrow \boxed{\overline{V_{eq}} = 10 - j30}$$

$$\boxed{z_{eq} = z_L = j2}$$

Potenza assorbita dal generatore di corrente. Per calcolare la potenza complessa assorbita dal generatore di corrente ci servono i valori della corrente che lo attraversa (fornito dal testo del problema) ed il valore della tensione ai suoi capi (imposta dal generatore di tensione in parallelo allo stesso). Dato che i versi relativi della tensione e della corrente sul generatore sono espressi secondo la convenzione dei generatori, il loro prodotto ci darà la potenza EROGATA dal generatore di corrente:

$$S_{EROGATA} = \frac{1}{2}\overline{E} \cdot \overline{A}^*$$

quindi, essendo la potenza erogata e quella assorbita l'una l'opposto dell'altra

$$S_{A\,assorbita} = -\frac{1}{2}\overline{E} \cdot \overline{A}^*$$

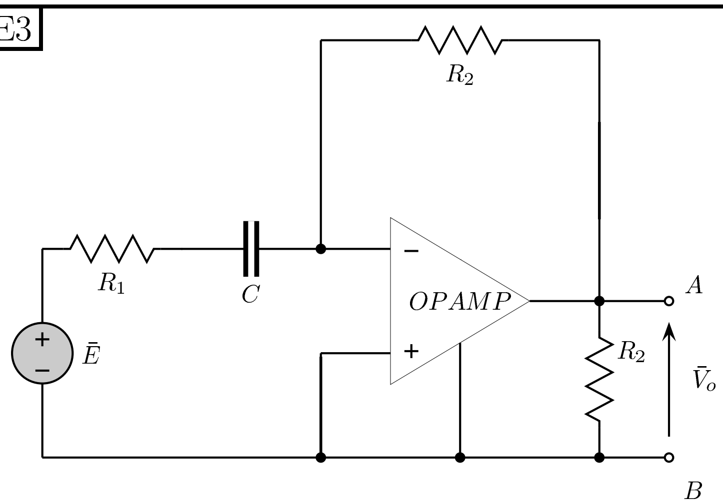
Si noti la presenza del fattore $\frac{1}{2}$ dovuta al fatto che sono state usate le ampiezze delle sinusoidi come modulo dei fasori (e NON i valori efficaci delle sinusoidi).

$$S_{A\,assorbita} = -\frac{1}{2}10 \cdot 4\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}} = -20\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1-j) \Rightarrow \boxed{S_{A\,assorbita} = -20\,W + j20\,var}$$

1.3 E3 II P.I. del 9-02-2017, prof. Dario D'Amore

1.3.1 Testo

E3



- Determinare la funzione di rete:

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{\bar{V}_o}{\bar{E}}$$

in forma simbolica.

Successivamente, posto:
$R_1 = 100$ [Ω], $R_2 = 200$ [Ω], $C = 1$ [μF]

- tracciare qualitativamente il grafico della risposta in ampiezza e fase di $\mathbf{H}(j\omega)$

1.3.2 Soluzione sintetica

Funzione di rete in forma simbolica

$$H(j\omega) = \frac{-R_2}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} = -\frac{R_2}{\frac{j\omega R_1 C + 1}{j\omega C}} \Rightarrow \boxed{H(j\omega) = -\frac{j\omega R_2 C}{j\omega R_1 C + 1}}$$

Grafico della risposta.
Sostituendo i valori dei componenti otteniamo:
$R_2C = 200\Omega \cdot 1\mu F = 0.2ms \rightarrow \frac{1}{R_2C} = 5000\frac{rad}{s}$
$R_1C = 100\Omega \cdot 1\mu F = 0.1ms \rightarrow \frac{1}{R_1C} = 10000\frac{rad}{s}$
$H(j\omega) = -\frac{j\omega(0.2ms)}{j\omega(0.1ms)+1}$
Il modulo di tale funzione sarà:

$$|H(j\omega)| = \frac{0.2 \cdot 10^{-3}\omega}{\sqrt{(0.1 \cdot 10^{-3}\omega)^2 + 1}}$$

La fase di tale funzione è pari a:

$$arg(H(j\omega)) = -\pi + \frac{\pi}{2} - atn\left(\frac{\omega \cdot 10^{-4}}{1}\right) = -\frac{1}{2}\pi - atn\left(\frac{\omega \cdot 10^{-4}}{1}\right)$$

Grafico del modulo

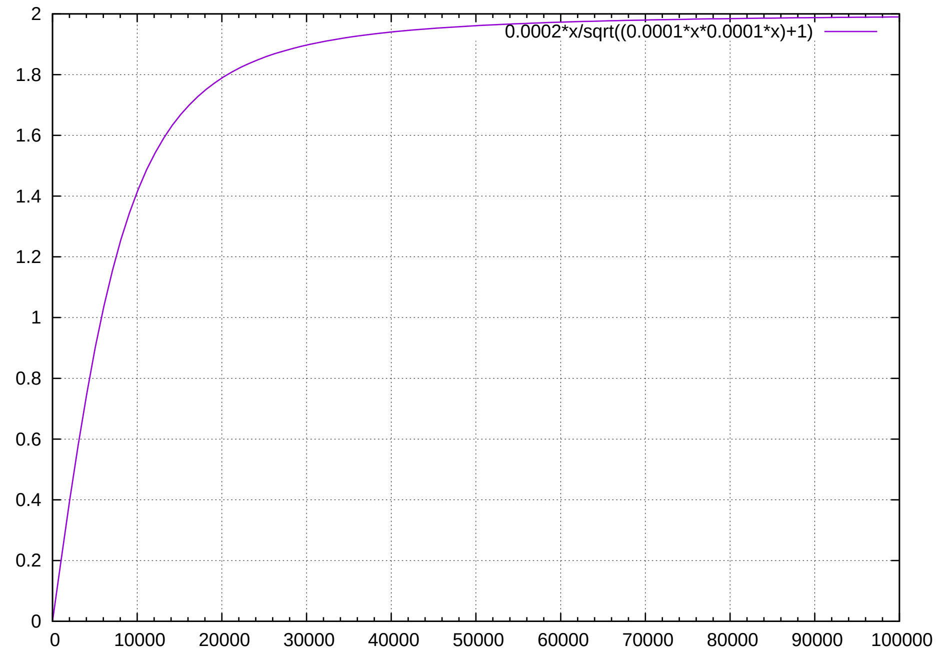


Grafico della fase