

Analogie tra diffusione di calore e modello circuitale

Leonardo Mutti

1 Obiettivo

Studiare la distribuzione di temperatura causata dalla diffusione di calore in una porzione di materiale conduttore, attraverso l'applicazione del modello circuitale e mediante analogie tra grandezze fisiche di diverso tipo.

2 Introduzione fisica

Il calore è una forma di energia che fluisce da un punto ad un altro con temperatura inferiore secondo la legge di Fourier della conduzione termica:

$$\mathbf{J} = -k\nabla\mathbf{T} \quad (1)$$

\mathbf{J} è il vettore densità di flusso di calore ($[Wm^{-2}]$) il cui modulo corrisponde alla quantità di calore scambiata nell'unità di tempo per unità di superficie e la direzione e il verso indicano dove fluisce il calore. k ($[Wm^{-1}K^{-1}]$) è invece la conducibilità termica del materiale in cui avviene la diffusione, per semplicità supposta scalare e costante e T è la temperatura in un certo punto. Essendo $\nabla\mathbf{T}$ la direzione di massimo accrescimento di T , tale relazione stabilisce che il flusso di calore avviene nella direzione di massima decrescita di T (lungo il gradiente $\nabla\mathbf{T}$) e con un'intensità proporzionale al tasso di cambiamento di T .

Si definisce infine la capacità termica di un oggetto il rapporto tra il calore Q da esso scambiato e la sua conseguente variazione di temperatura:

$$C = \frac{\partial Q}{\partial T} \quad (2)$$

Le dimensioni sono $[JK^{-1}]$.

3 Discretizzazione e analogie con modello circuitale

Si consideri ora una porzione τ di materiale conduttore avente bordo Σ . Integrando la legge di Fourier su Σ si ottiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = - \int_{\Sigma} \langle \nabla \mathbf{T}, \hat{\mathbf{u}}_n \rangle d\sigma \quad (3)$$

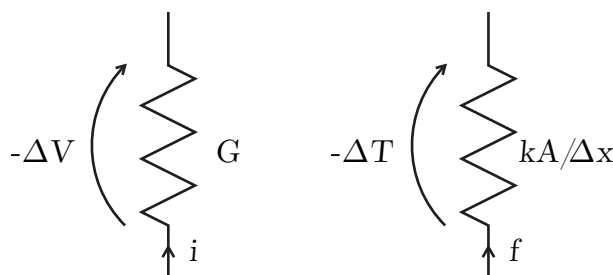
dove Q è il calore, $\partial Q/\partial t$ è il calore scambiato per unità di tempo da τ attraverso la superficie Σ , $\hat{\mathbf{u}}_n$ è la normale uscente da Σ e $d\sigma$ l'elemento di superficie.

Se Σ è chiusa si può interpretare la (3) come una legge di conservazione dell'energia, nel senso che se in τ varia la quantità di calore allora deve essere avvenuto un certo flusso attraverso il bordo Σ .

Se ci si restringe al caso di diffusione monodirezionale tra due punti distanti Δx e attraverso una sezione di area A , supponendo omogeneità del materiale conduttore e utilizzando la (3) si ottiene:

$$f := \frac{\partial Q}{\partial t} = -A \frac{k}{\Delta x} \Delta T \quad (4)$$

Da qui si evince un'analogia con l'equazione costitutiva di un resistore. Difatti $f = \partial Q/\partial t$ può essere accostato al concetto di corrente elettrica (flusso di carica), $kA/\Delta x$ ad una conduttanza e ΔT a una differenza di potenziale. Allora il flusso di calore tra due punti distanti Δx può essere modellizzato con un resistore di conduttanza $kA/\Delta x$. Il segno negativo deriva dall'aver considerato la convenzione mostrata in figura:

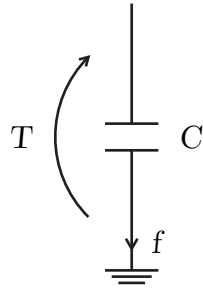


Dalla definizione di capacità termica si può invece derivare una legge simile a quella che regola il funzionamento di un condensatore:

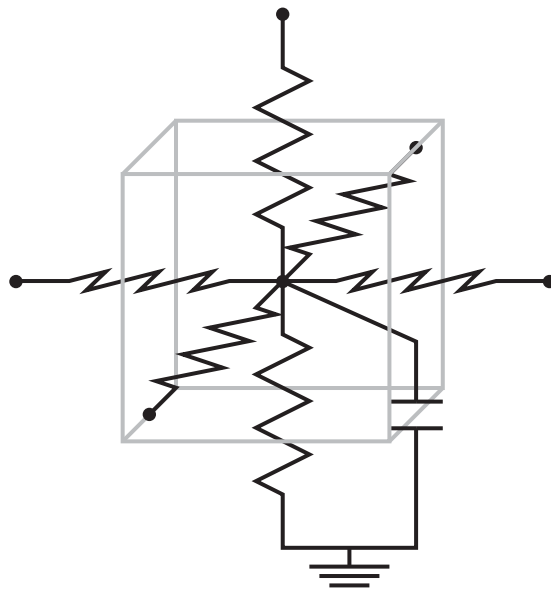
$$f = \frac{\partial Q}{\partial t} = C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5)$$

In questo modo è possibile tener conto dell'attitudine del materiale ad immagazzinare calore.

È conveniente considerare tutte le temperature rispetto ad un riferimento comune, ad esempio la temperatura dell'ambiente:

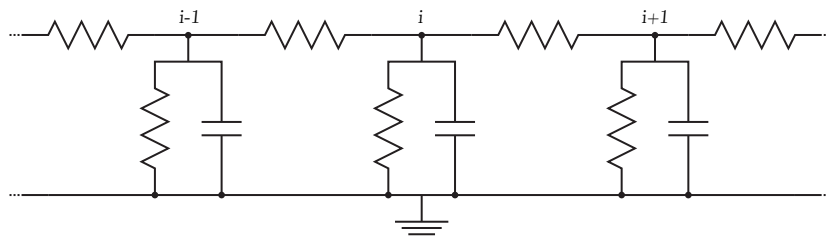


Estendere tali analogie alla diffusione bi o tridimensionale è intuitivamente possibile eseguendo un processo di discretizzazione del blocco di materiale in piccole suddivisioni rispettivamente rettangolari o parallelepipedali. In queste viene assunta l'uniformità delle grandezze fisiche che conseguentemente vengono concentrate in nodi caratterizzanti ogni elementino. Ogni nodo scambierà calore con i nodi adiacenti e a questo corrisponderanno dei resistori, l'accumulo di calore sarà modellizzato da un condensatore come in precedenza ecc.



In figura è stata aggiunto un resistore collegato al riferimento per tener conto dello scambio di calore verso l'ambiente nel caso l'elemento di volume non sia interno.

In sostanza nel caso unidimensionale il circuito equivalente risulta:



Ad ogni nodo contrassegnato da un indice del circuito elettrico in figura corrisponde un nodo nel modello di diffusione mododimensionale discretizzato.

4 Implementazione

Impostato il modello rappresentante il fenomeno diffusivo è possibile svolgere simulazioni con l'aiuto di un programma di calcolo.

Occorre quindi scrivere per ogni nodo le equazioni che governano il suo comportamento fisico: ciò è reso semplice dall'aver individuato le analogie con le variabili elettriche espresse in precedenza perchè si può ricorrere ad un algoritmo di analisi nodale per definire il circuito equivalente.

Ciò che si ottiene è il seguente sistema autonomo (lineare) di equazioni differenziali ordinarie:

$$A\mathbf{T} + C\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{f} \quad (6)$$

A la matrice di "connessione" dei vari nodi: nel caso di diffusione monodimensionale è tridiagonale, in quanto ogni nodo è in relazione col precedente e il successivo per via delle equazioni di analisi nodale. Nel caso di diffusione 2D e 3D la struttura rimane simile. C è invece la matrice in cui sono codificate le informazioni riguardanti le capacità termiche dei singoli nodi e \mathbf{f} è un vettore che riassume i flussi di calore immessi dall'esterno in ciascun nodo. Nel caso monodimensionale f_i è semplicemente il calore per unità di tempo iniettato nel nodo i -esimo. Infine \mathbf{T} è il vettore delle temperature nodali nonchè incognita del problema.

Si dimostra che il sistema è asintoticamente stabile e si può quindi procedere allo studio degli equilibri e della risposta dinamica.

Nel primo caso è sufficiente risolvere un sistema lineare, nel secondo conviene ricorrere all'implementazione di un metodo numerico per studiare approssimativamente l'evoluzione temporale del sistema (ad esempio un metodo di Eulero o il metodo dei trapezi).

5 Risultati e grafici

Sono riportati di seguito due grafici delle distribuzioni di temperature per due casi significativi.

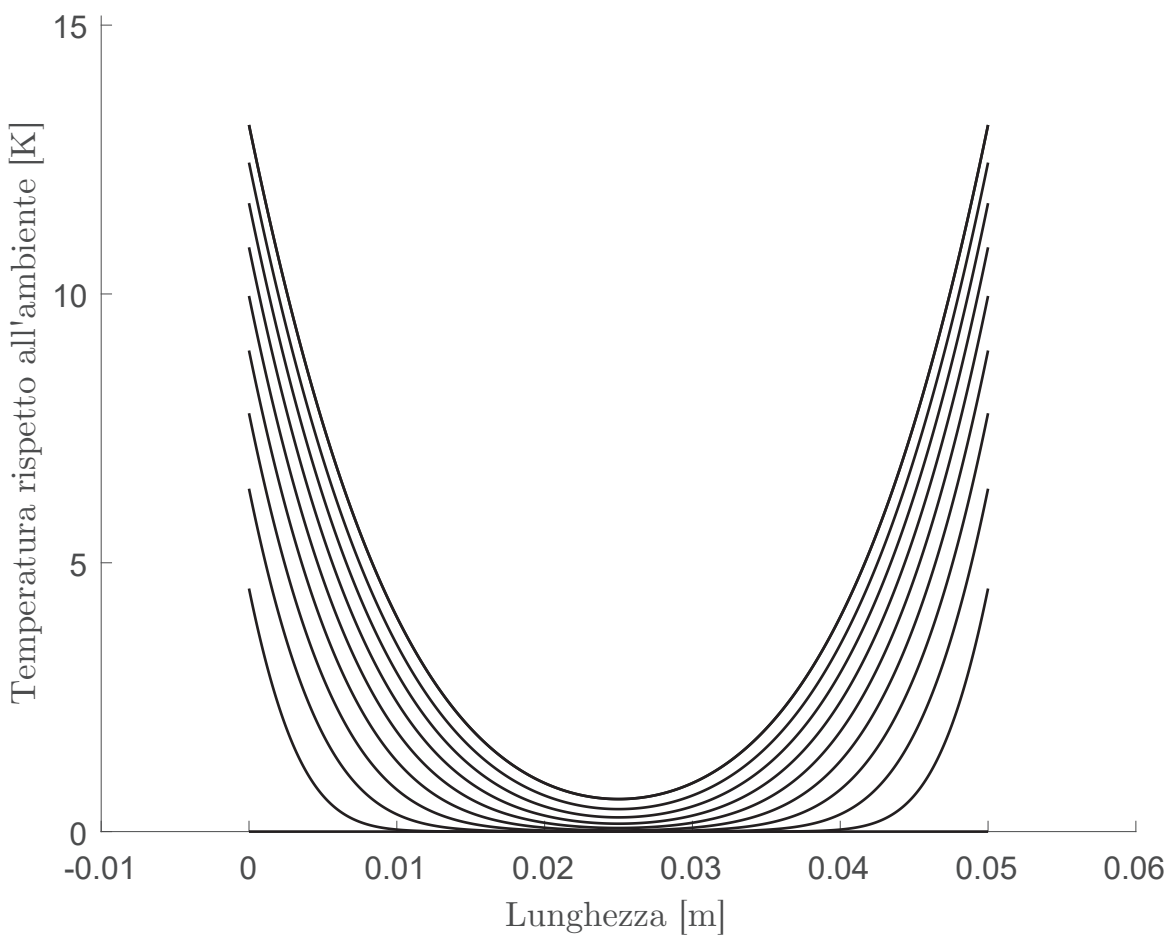
Vengono tralasciate analisi dell'errore di approssimazione commesso nella risoluzione di (6) e confronti con soluzioni analitiche di (1).

5.1 Risposta dinamica ad ingresso costante, diffusione monodirezionale

Una barra in silicio di dimensioni fissate ed inizialmente a temperatura ambiente viene riscaldata in maniera costante a due estremità opposte.

È studiata la distribuzione delle temperature approssimando a monodirezionale il flusso di calore, cioè considerando trascurabile il contributo alla diffusione sulla sezione rispetto a quello sulla lunghezza.

Si suppone la potenza termica immessa ai due estremi uguale e costante nel tempo e vengono considerati uniformi il materiale e lo scambio di calore della barra verso l'ambiente lungo tutta la sua lunghezza.



Il grafico mostra sovrapposte le distribuzioni a istanti successivi in modo tale che ad una curva “più alta” corrisponda un tempo più avanzato. All’istante iniziale la distribuzione è uniformemente nulla. Al passare del tempo si nota come la temperatura agli estremi aumenti e raggiunga valori superiori a quelli dei nodi centrali per effetto della dispersione di calore lontano dalle due sorgenti alle estremità.

La distribuzione è ovviamente simmetrica per via delle ipotesi e la simulazione copre un intervallo di 1 secondo.

5.2 Risposta a regime con ingresso sinusoidale, diffusione in due direzioni

Una placca in silicio di cui viene trascurato lo spessore ed inizialmente a temperatura ambiente viene riscaldata in zona centrale.

In particolare il riscaldamento avviene immettendo potenza in tutti i nodi all’interno di una zona quadrata centrata nel centro della placca.

La forma funzionale della potenza termica immessa è $f(t) = f_0(1 + \cos(\omega t))$ con $f_0 > 0$, una sinusoide di ampiezza f_0 e traslata in modo tale che i minimi abbiano ordinata nulla: questo corrisponde all’esigenza di rappresentare una cessione di calore al materiale e non un assorbimento.

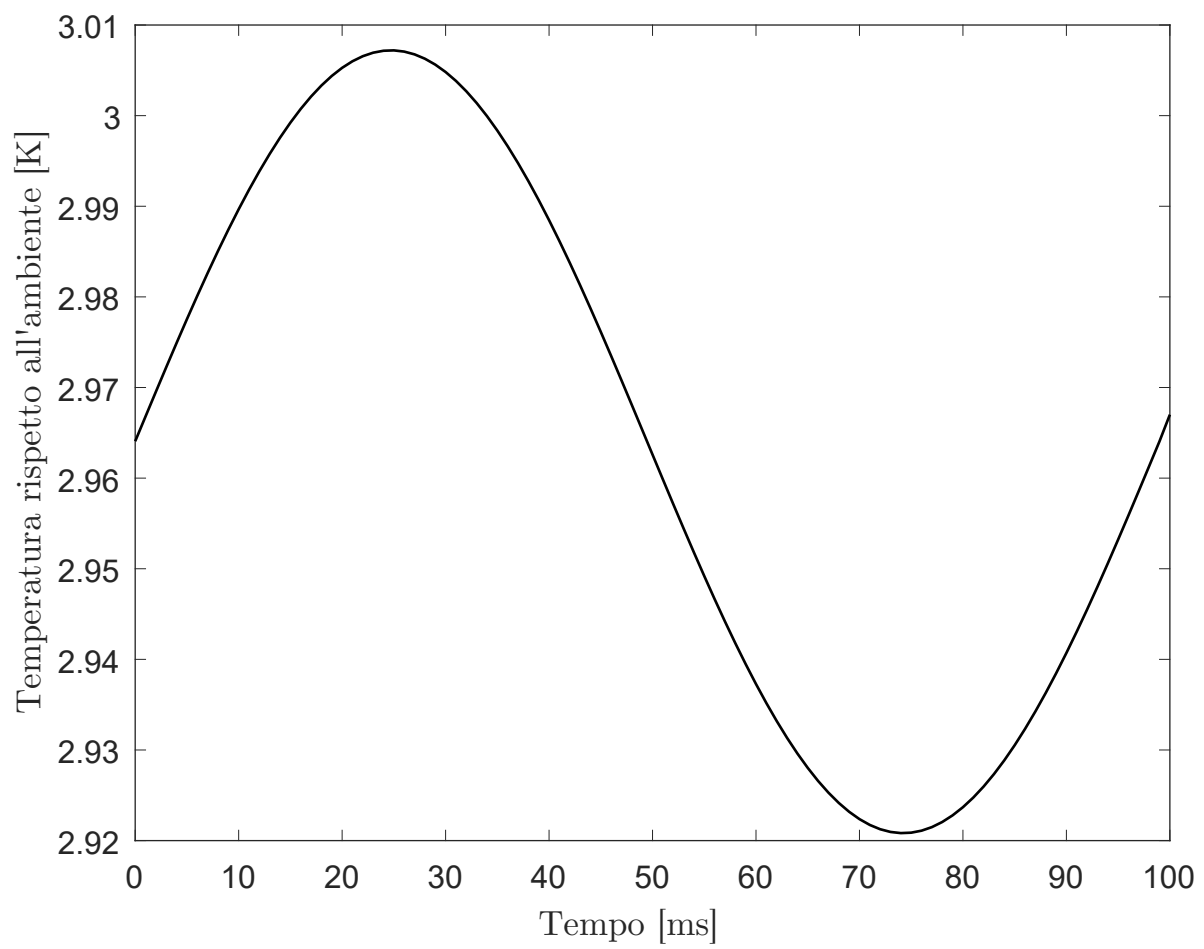
Viene studiato l’andamento a regime delle temperature nodali.

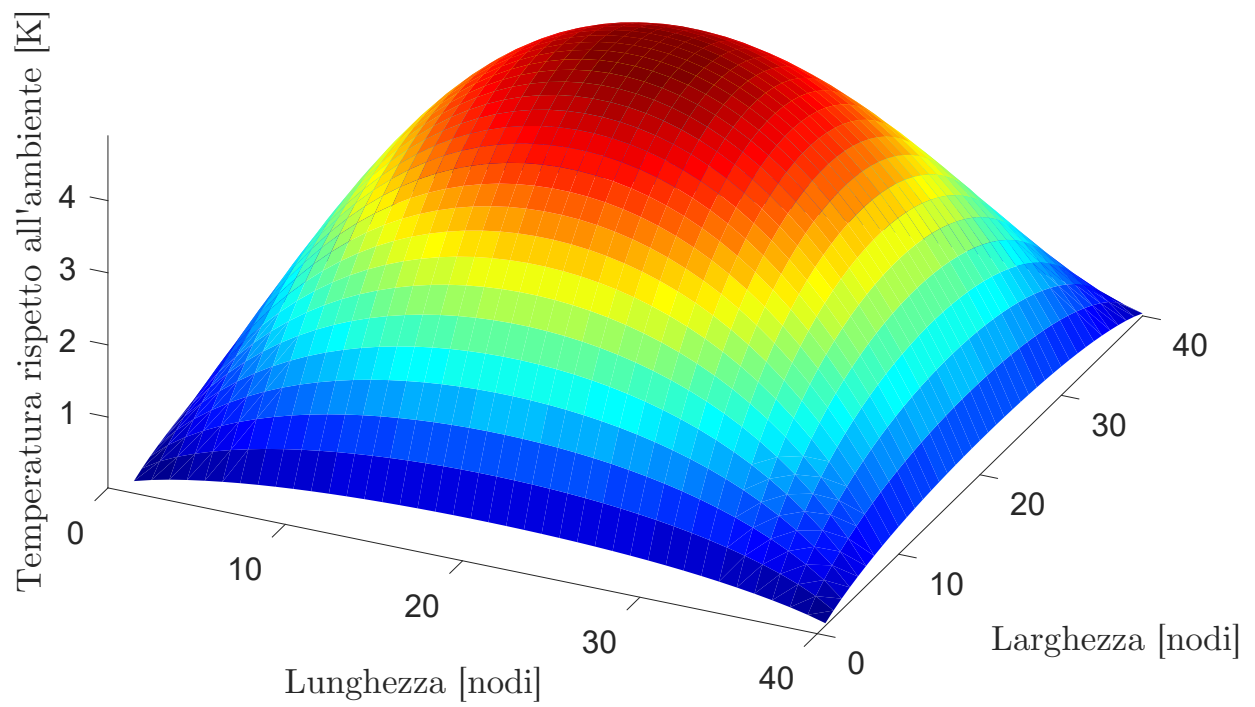
Per questa simulazione è conveniente adottare un approccio diverso per quanto riguarda la risoluzione del sistema (6): è sufficiente ricordare le semplificazioni che è possibile introdurre a livello circuitale per il regime alternato sinusoidale e sfruttare la linearità del sistema, applicando la sovrapposizione degli effetti per tener conto del contributo f_0 di traslazione della sinusoide.

Di seguito sono riportati due grafici.

Il primo illustra l’andamento della temperatura di un nodo (i, j) della griglia di discretizzazione della placca durante un periodo della sinusoide. In particolare in figura la griglia è 40×40 e il nodo scelto è $(10, 10)$.

Nel secondo grafico è invece rappresentata la distribuzione della temperatura nella placca ad un certo istante t , in questo caso l’inizio di un periodo.





6 Conclusioni

In conclusione questo approccio mostra come il riconoscimento di analogie tra variabili fisiche di tipo diverso possa introdurre delle semplificazioni nello studio di un fenomeno naturale, in questo caso la diffusione di calore in un materiale conduttore.

I principali limiti dei modelli sviluppati risiedono nell'approssimazione al lineare della conduzione: la conducibilità termica k è in generale una matrice e non è costante, ma varia con la temperatura così come la capacità termica del materiale.

È però indubbio che la linearità consenta di giungere a dei risultati con più agevolezza.

Sebbene i metodi di risoluzione approssimata della (1) non siano implementati e definiti rigorosamente, questi consentono comunque di ottenere risultati che confermano l'intuizione fisica sulle forme delle distribuzioni delle temperature.

Le previsioni effettuate a priori sui grafici trovano riscontro qualitativo anche in altre simulazioni, ad esempio nello studio della risposta in frequenza del circuito equivalente o nell'introduzione di zone a differente conducibilità nel materiale.